UM DESACOPLAMENTO CANÔNICO PARA SISTEMAS

LINEARES MULTIVARIÁVEIS

JOÃO LUIZ MAURITY SABOIA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:

Lawrence Kirschberg
(Presidente)

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

JULHO DE 1970

À Ana Lúcia

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu orientador Dr. Lawrence Kerschberg pelo incentivo e encorajamento durante os meses em que trabalhamos juntos. Êste agradecimento é extensivo a todos os colegas da COPPE que, de alguma forma, contribuiram para o desenvolvimento dêste trabalho; especialmente a Paulo Augusto Silva Veloso e Luiz Fernando Loureiro Legey.

A Ana Rita e Vera, o meu muito obrigado pelo trabalho paciente e competente de datilografia.

Finalmente, agradeço à minha mulher Ana Lúcia pela sua paciência e estímulo durante todos os momentos.

Êste trabalho foi realizado graças ao apoio financeiro da COPPE.

João Luiz Mauritz Sabóia

Sabóia, J.

S I N O P S E

Esta tese apresenta um novo método para o desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis, invariantes no tempo. O método utiliza os conceitos de Fatores Invariantes e Forma Canônica Racional de uma matriz. São dadas condições necessárias e suficientes para o desacoplamento do sistema, e estuda-se a controlabilidade e observabilidade do sistema desacoplado.

Embora se tenha estudado o problema sob o ponto de vista da teoria de contrôle contínuo, o método também pode ser empregado para sistemas lineares discretos.

Foi desenvolvido um programa de computador que calcula os fatores invariantes de uma matriz, a transformação de similaridade que leva uma matriz à sua correspondente forma canônica racional, e que determina se o sistema pode ser desacoplado.

João Luiz Mauritz Sabóia

A B S T R A C T

In this thesis a new method is presented for the decoupling of multivariable, time-invariant, linear systems. The method utilizes the Invariant Factors and the Rational Canonical Form of a matrix. Necessary and sufficient conditions are given for the input-state-output decoupling of the system. System controllability and observability are studied in this framework.

Although the decoupling scheme is developed for continuous control systems, it is also valid for discrete-time linear systems.

A Fortran computer program is presented which calculates the invariant factors of a matrix, the similarity transformation that maps a matrix to the rational canonical form, and determines whether the system can be decoupled.

Í N D I C E

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO E PRELIMINARES

1. - OBJETIVO DA PESQUISA

O objetivo desta pesquisa é o desenvolvimento de um método de desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis. O método surge naturalmente, a partir dos conceitos de "fatôres invariantes de uma matriz" e sua "forma canônica racional"[1,2,3].

O desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis, tem sido profundamente estudado por Gilbert[4], Falb, Wolovich[5,6].

O desacoplamento aqui estudado será diferente do desenvolvido pelos autores acima citados pois, enquanto lá a preocupação é apenas com as entradas e saidas, nós nos preocuparemos também com os estados, decorrendo dai duas definições diferentes para desacoplamento: "desacoplamento entrada -saida" e "desacoplamento entrada-estado-saida". A diferença entre êstes dois conceitos, será vista no decorrer da tese e se verá também, que o segundo conceito é mais forte que o primeiro.

2. - SUMÁRIO DO CONTEÚDO DA TESE

O resto dêste capítulo é dedicado à notação e terminologia além de uma apresentação sucinta do desacoplamento entrada-saida.

No Capítulo II é desenvolvido um método de desacoplamento entrada-estado-saida, que utiliza os conceitos de Fatôres Invariantes e Forma Canônica Racional de uma matriz. Chega-se ao teorema que fornece condições necessárias e suficientes para êste desacoplamento. Estuda-se a controlabilidade e observabilidade do sistema desacoplado além de sua função de transferência.

O Capítulo III apresenta dois programas para computador, que são fundamentais para o emprêgo do método apresentado no capítulo II.

No Capítulo IV estão as conclusões da tese.

O Apêndice apresenta um resumo da teoria dos fatôres invariantes e a forma canônica racional de uma matriz, necessária para a compreensão do trabalho desenvolvido.

3. - <u>CONTRIBUIÇÕES DA TESE</u>

A tese apresenta um método nôvo de desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis. Êle é bastante simples e geral, pois são empregadas apenas transformações de coordenadas nas entradas, estados e saidas. A transformação dos estados conduz à Forma Canônica Racional que é válida para qualquer campo sôbre o qual se trabalhe (os auto-valores podem ser reais ou complexos, simples ou repetidos). O teorema que fornece condições necessárias e suficientes para êste desacoplamento é encontrado, e são desenvolvidos programas que auxiliam bastante a realização do desacoplamento.

4. - NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

Os capítulos da tese são denotados por algarismos romanos e divididos em seções, sendo que, cada seção é numerada consecutivamente. Cada seção contém definições, teoremas e lemas. Dentro de um determinado capítulo, a j-ésima proposição (definição, teorema ou lema) da i-ésima seção é denotada por proposição (i.j). Quando nos referimos, fora de um capítulo, a uma proposição dêste capítulo, usamos o algarismo romano do capítulo. Assim, a proposição 3.2 do capítulo II será referida por (II.3.2) , quando esta referência for feita em outro capítulo. Se esta for do Apêndice será referida por (A.3.2). Quando a referência for feita no mesmo capítulo, usaremos apenas (3.2).

Equações são numeradas consecutivamente em cada capítulo com o algarismo romano referente ao capítulo precedendo a numeração. Assim, a décima equação numerada do capítulo II é denotada por (II.10). Se esta for do Apêndice será (A.10).

Os símbolos mais frequentes que aparecem na tese, são:

A, B, C, ...	- matrizes constantes.
m x n	- dimensão de uma matriz (m linhas, n colunas)
A'	- matriz transposta de A
A^{-1}	- matriz inversa de A

$\oplus M$	- forma canônica racional
$\vert \ \ \vert$	- barras que delimitam uma matriz quando esta for representada por alguns de seus elementos
C^*	- matriz de controlabilidade
O^*	- matriz de observabilidade
I	- matriz identidade
S(A, B, C)	- sistema determinado pelas matrizes A, B, C.
$S(\oplus M, Q, R)$	- sistema desacoplado entrada-estado-saida.
s	- variável de Laplace
$H(s, \oplus M)$	- função de transferência do sistema desacoplado
λ	- variável independente dos fatôres invariantes
$A(\lambda)$	- matriz polinomial
$f_i(\lambda)$	- i-ésimo fator invariante
$\dot{x}$	- derivada do vetor estado em relação ao tempo
min	- mínimo
rank	- rank de uma matriz
det	- determinante
t	- tempo

5. - O DESACOPLAMENTO ENTRADA-SAIDA E SUA SOLUÇÃO

Seja o sistema linear dinâmico multivariável invariante no tempo S(A,B,C) representado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \qquad (I.1)$$

onde:

$u = u(t)$	-	vetor-entrada real m-dimensional
$y = y(t)$	-	vetor-saida real m-dimensional
$x = x(t)$	-	vetor-estado real n-dimensional
t	-	tempo
A	-	matriz constante, real (nxn)
B	-	matriz constante, real (nxm)
C	-	matriz constante, real (mxn)

Um assunto largamente estudado é o desacoplamento entrada-saida de S(A,B,C) que consiste em se determinar uma lei de contrôle que faça com que tenhamos entradas controlando saidas independentemente, ou seja, cada componente do vetor-entrada influenciando uma componente do vetor-saida. É êste, em termos heurísticos, o problema do desacoplamento entrada-saida.

Gilbert, Falb e Wolovich estudaram êste problema usando a lei de contrôle:

$$u = Fx + G\bar{u} \qquad (I.2)$$

onde:

$\bar{u} = \bar{u}(t)$ - nôvo vetor-entrada real m-dimensional

F - matriz real constante (mxn)

G - matriz real constante não-singular (mxm)

Seja S(F,G) o sistema S(A,B,C) com a lei de contrôle (I.2).

Falb-Wolovich[5] determinaram condições necessárias e suficientes para o desacoplamento entrada-saida e determinaram uma classe de matrizes (F,G) que desacopla S(A,B,C). Gilbert[4] extendeu os resultados obtidos em[5] generalizando o problema do desacoplamento. Além disso, o seu trabalho é apresentado de uma forma mais clara.

A função de transferência de S(A,B,C) é dada por:

$$H(s) = C(Is-A)^{-1} B \qquad (I.3)$$

onde:

I - matriz identidade (nxn)

s - variável da transformada de Laplace

A função de transferência de S(F,G) é dada por:

$$H(s,F,G) = C(Is - A - BF)^{-1} BG \qquad (I.4)$$

De acôrdo com Gilbert[4], temos:

5.1 - DEFINIÇÃO

Dizemos que há desacoplamento entrada-saida em S(F,G) se H(.,F,G) é diagonal e não singular.

O teorema que resolve o problema do desacoplamento entrada-saida e que é devido a Gilbert está enunciado resumidamente abaixo:

5.2 - TEOREMA

(i) Para todo sistema S(A,B,C) existe uma matriz D (*) de dimensão (mxm) ùnicamente determinada. É possível desacoplar S(F,G) se e sòmente se D é não-singular.

(ii) Se D é não singular, pode-se determinar a partir de S(A,B,C) os seguintes resultados: inteiros $p_i>0$, i=1, ..., m; inteiros $r_i \geq 0$, i=1 , ..., m+2 ($r_i<p_i$, i=1,...,m e $r_{m+2} \neq 0$ se e sòmente se S é não-controlável); polinômios $\alpha_i(s) = s^{r_i} - \alpha_{i1}s^{r_i-1} - \ldots - \alpha_{ir_i}$, i=1,...,m+2 (se $r_i=0, \alpha_i(s)=1$); matrizes G_i(mxm), i=1,...,m; matrizes J_{ik}(mxn), i=1,...,m,k=1,...,p_i; matrizes K_{ik}(mxn),i=1,...,m,k=1,...,r_{m+2} (as K_{ik} não são definidas se $r_{m+2}=0$; uma matriz A^*(mxn). A classe de matrizes {F,G} que desacoplam o sistema é dada por:

(*) - Vide página 9.

$$G = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \qquad \text{e}$$

$$F = -D^{-1} A^* + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p_i} (\sigma_{ik}-\pi_{ik}) J_{ik} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r_{m+2}} \rho_{ik} K_{ik} \tag{I.5}$$

onde:

$\pi_{ik}=\alpha_{ik}$, $k=1,\ldots,r_i, \pi_{ik}=0, k=r_i+1,\ldots,p_i$, e λ_i, σ_{ik}, ρ_{ik} são números reais arbitrários ($\lambda_i \neq 0$, $i=1,\ldots,m$). O último termo em (I.5) é nulo se $r_{m+2}=0$.

(iii) Sejam $h_i(s,F,G)$, $i=1,\ldots,m$, os elementos da matriz diagonal $H(s,F,G)$. Então:

$$h_i(s,F,G) = \frac{\lambda_i \; \alpha_i(s)}{\psi_i(s, \sigma_i)} \tag{I.6}$$

$$\psi_i(s,\sigma_i) = s^{p_i} - \sigma_{i1} s^{p_i-1} - \ldots - \sigma_{ip_i} \;, \; \sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{ip_i})$$

onde λ_i e σ_i, $i=1,\ldots,m$, podem ser escolhidos arbitrariamente. Uma vez que λ_i e σ_i, $i=1,\ldots,m$, sejam escolhidos, $\{F,G\}$ é dada por (I.5).

(iv) A equação característica do sistema em malha fechada é dada por:

$$q(s,F) = \det (Is-A-BF) = \alpha_{m+1}(s)\ \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^{m} \psi_i(s,\sigma_i) \tag{I.7}$$

A matriz D é tal que:

$$D = \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_m \end{vmatrix}$$

onde $D_i = C_i\ A^{d_i}\ B \quad i = 1, 2, \ldots, m$

sendo

C_i - i-ésima linha de C.

$$d_i \begin{cases} = \min \{j \ / \ C_i\ A^j\ B \neq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\} \\ = n-1 \quad \text{se} \quad C_i\ A^j\ B = 0 \qquad \text{para todo } j \end{cases}$$

O teorema 5.2 resolve o problema do desacoplamento entrada-saída, pois (I.6) fornece as características em malha fechada que o sistema pode ter e, uma vez que H(s,F,G) é escolhida, (I.5) fornece a lei de contrôle {F,G}.

Para maiores detalhes sôbre o teorema 5.2, podem ser utilizadas as referências[4,7].

C A P Í T U L O I I

O DESACOPLAMENTO ENTRADA-ESTADO-SAÍDA

1 - INTRODUÇÃO

Seja S(A,B,C,) um sistema linear dinâmico multivariável invariante no tempo como em I.1), com a diferença que, aqui, o sistema não possuirá obrigatòriamente o mesmo número de entradas e saídas. Assim, podemos representar S(A,B,C) por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad \text{(II.1)}$$

onde:

$u \triangleq u(t)$ - vetor-entrada real m-dimensional

$y \triangleq y(t)$ - vetor-saída real p-dimensional

$x \triangleq x(t)$ - vetor-estado real n-dimensional

t - tempo

A - matriz constante, real $(n \times n)$

B - matriz constante, real $(n \times m)$

C - matriz constante, real $(p \times n)$

Será desenvolvido, neste capítulo, um método de desacoplamento para S(A,B,C). Êste método, entretanto, não utilizará o desacoplamento entrada-saída (I.1.1) e sim o desacoplamento entrada-estado-saída, que será defi nido adiante.

Representaremos os vetores x, u, y, respectivamente por:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} \qquad u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{vmatrix}$$

1.1 - DEFINIÇÃO

Seja X o conjunto de componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do vetor-estado x de S(A,B,C). Seja $X_1, X_2, \ldots, X_k$ uma partição de X.

Dizemos que há desacoplamento entrada-estado em S(A,B,C) se cada conjunto X_i é influenciado por apenas uma componente de entrada u_j, e cada u_j influencia, no máximo, um conjunto X_i.

Dizemos que há desacoplamento estado-saída em S(A,B,C), se cada conjunto X_i influencia apenas uma componente de saída y_ℓ, e cada y_ℓ é influenciado, no máximo, por um conjunto X_i.

Dizemos que há desacoplamento entrada-estado-saída em S(A,B,C), se cada conjunto X_i é influenciado por apenas por u_j, e influencia apenas um y_ℓ, e cada u_j influencia, no máximo, um conjunto X_i, e cada y_ℓ é influen ciado, no máximo, por um conjunto X_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, $(\ell = 1, 2, \ldots, p)$.

Observação

Quando se diz, na definição (1.1), que X_i é influenciado por u_j, isto significa dizer que, pelo menos, um $x_i \in X_i$ é influenciado por u_j. Quando se diz que X_i influencia um y_ℓ, isto significa dizer que, pelo menos, um $x_i \in X_i$ influencia y_ℓ. Portanto, é possível que, após o desacoplamento, o sistema não seja controlável nem observável (2.3, 2.4, 3.3, 3.4).

Comparando-se as definições (1.1) e (I.1.1), verificamos que em (I.1.1) não há preocupação com os estados do sistema que poderão estar acoplados, enquanto que em (1.1) há também desacoplamento entre os estados.

Na definição (1.1) foi dito que uma componente de entrada influencia um conjunto de componentes de estado que, por sua vez, influencia uma componente de saída. A definição foi feita desta forma para tornar o estudo sistemático. É evidente que se tivéssemos, por exemplo, duas entradas, influenciando um conjunto de estados, e apenas êste conjunto de estados, também teríamos desacoplamento entrada-estado-saída. Casos como êste não foram incluídos na definição (1.1) para evitar que o excesso de generalização acarretasse resultados pouco práticos.

Verificamos, pela definição (1.1), que, após o desacoplamento entrada-saída, (m - k) componentes de entrada, e (p - k) componentes de saída de S(A,B,C) estarão isoladas do sistema, pois não influenciarão, nem serão influenciadas por nenhuma componente de estado.

O método utilizado neste trabalho usará as noções de fatores invariantes da matriz A (A.1.1) e sua forma canônica racional (A.8), que foram resumidas no Apêndice da tese. Segundo êste, existe uma matriz não-singular T, tal que:

$$\oplus M = T^{-1} AT \tag{II.2}$$

onde $\oplus M$ é a forma canônica racional de A.

Admitindo-se que A possui k fatores invariantes com grau positivo $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_k(\lambda)$, a matriz $\oplus M$ terá a forma:

$$\oplus M = \begin{vmatrix} M_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & M_{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M_k \end{vmatrix} \quad \text{onde}$$

$$M_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & -(\alpha_{p_{i-1}+1}) \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & -(\alpha_{p_{i-1}+2}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & -(\alpha_{p_i}) \end{vmatrix}$$

sendo que cada matriz $M_i (i = 1,2, \ldots, k)$ corresponde à matriz "companion" do fator invariante $f_i(\lambda)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, de A. Portanto, o sistema S(A,B,C) pode ser transformado no sistema S(A,B,C,T) abaixo

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= T^{-1} AT \bar{x} + T^{-1} Bu \\ y &= CT \bar{x} \end{aligned} \qquad \text{(II.4)}$$

onde $$\bar{x} = T^{-1} x \qquad \text{(II.5)}$$

Para o desacoplamento são propostas transformações de coordenadas para a entrada e a saída. Para a entrada, usamos a transformação:

$$u = G \bar{u} \qquad \text{(II.6)}$$

onde $\bar{u}$ é um vetor real m-dimensional, correspondente às novas entradas e G é uma matriz real (m x m).

Para a saída, usamos a transformação:

$$\bar{y} = H\, y \tag{II.7}$$

onde $\bar{y}$ é um vetor real p-dimensional correspondente às novas saídas e H é uma matriz real (p x p).

Portanto, o sistema S(A,B,C,T) transforma-se no sistema S(A,B,C,T,G,H) abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= T^{-1}\, AT\, \bar{x} \; + \; T^{-1}\, BG\, \bar{u} \\ \bar{y} &= HCT\, \bar{x} \end{aligned} \tag{II.8}$$

ou ainda, fazendo-se $T^{-1}\, BG = Q$ e $HCT = R$

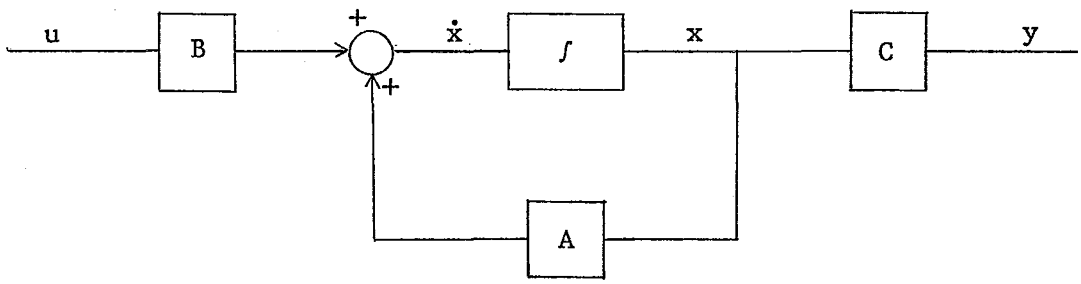
$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \oplus M\, \bar{x} + Q\, \bar{u} \\ \bar{y} &= R\, \bar{x} \end{aligned} \tag{II.9}$$

Sejam $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{y}$ representados, respectivamente por:

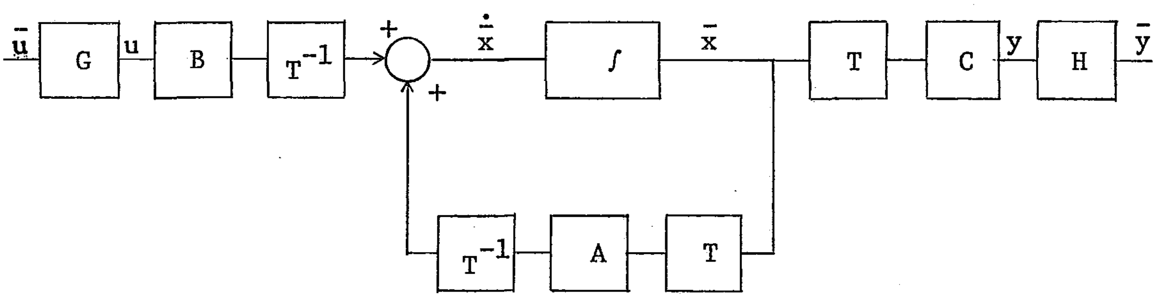
$$\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_n \end{vmatrix} \qquad \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{u}_m \end{vmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_p \end{vmatrix}$$

Representemos o sistema S(A,B,C,T,G,H) pela forma abreviada S($\oplus$M,Q,R).

O sistema S(A,B,C) pode ser representado por:



O sistema S($\oplus$M,Q,R) pode ser representado por:



2 - DESACOPLAMENTO ENTRADA-ESTADO

Seja $\bar{X}$ o conjunto de componentes $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ do vetor-estado $\bar{x}$ de $S(\oplus M,Q,R)$ e seja $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k$ a partição de $\bar{X}$ determinada pelos blocos M_i de $\oplus M$.

Nesta seção será desenvolvido o desacoplamento entrada-estado, que corresponde a fazer (veja definição 1.1) com que cada um dos conjuntos $\bar{X}_i$ determinados por $\oplus M$ seja influenciado por uma componente de entrada $\bar{u}_j$, mas de forma tal que cada $\bar{u}_j$ influencie, no máximo, um $\bar{X}_i$.

Seja d_i o grau de $f_i(\lambda)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

É fácil verificar que a definição de desacoplamento entrada-estado de $S(\oplus M,Q,R)$ é equivalente a que se tenha a matriz Q com a seguinte forma:

$$Q = \left|\begin{array}{ccccccccc}
q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
q_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
q_{p_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & q_{p_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & q_{p_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & q_{p_2+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & q_{p_{k-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_{p_{k-1}+1} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_n & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right|
\begin{array}{c} d_1 \\ \\ \\ \\ d_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ d_k \end{array}
\qquad (II.10)$$

onde q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ são constantes, e pelo menos um q_i de cada uma das k primeiras colunas não deve ser nulo.

Sejam:

$$\mathcal{T} = T^{-1}B = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1m} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nm} \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix}$$

Vejamos em que condições existe G tal que $T^{-1}BG$ tem a forma indicada em (II.10).

Para que a i-ésima coluna de $T^{-1}BG$ tenha a forma indicada em (II.10) será necessário e suficiente que o sistema de equações abaixo tenha solução.

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_{1j}\, g_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_{2j}\, g_{ji} = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_{p_{i-1}j}\, g_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_{p_{i-1}+1,j}\, g_{ji} = q_{p_{i-1}+1} \qquad \text{(II.11)}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_{p_i j}\, g_{ji} = q_{p_i}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_{p_i+1,j}\, g_{ji} = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_{nj}\, g_{ji} = 0$$

Notamos que $(n - d_i)$ equações do sistema de equações lineares (II.11) são homogêneas, enquanto que d_i equações não são obrigatòriamente homogêneas. Além disso, temos apenas k sistemas de equações para serem resolvidas pois os (m - k) sistemas restantes são triviais (basta escolher as últimas (m - k) colunas de G nulas)

Podemos ter três hipóteses:

1) $m < k$

2) $m = k$

3) $m > k$

1) Se tivermos $m < k$ (mais blocos de estados $\bar{X}_i$ do que componentes de entrada $\bar{u}_j$) não será possível o desacoplamento entrada-estado, pois teremos $(k - m)$ blocos X_i que não poderão ser comandados pelas componentes de entrada.

2) Se tivermos $m = k$ (mesmo número de blocos de estados e de componentes de entrada), será necessário que os k sistemas de equações lineares (II.11) tenham solução para que o desacoplamento entrada-estado seja possível.

3) Se tivermos $m > k$ (menos blocos de estados do que componentes de entrada) será preciso que os k sistemas do tipo (II.11) tenham solução. Deve-se notar, neste caso, que $(m - k)$ colunas de Q serão nulas, o que significa dizer que $(m - k)$ entradas não influenciam o sistema, ou seja, que as últimas $(m - k)$ colunas de G são nulas.

Podemos, portanto, enunciar o lema:

2.1 - LEMA

Uma condição necessária para o desacoplamento entrada-estado é que m > k, onde m é o número de entradas e k o número de fatores invariantes da matriz A com grau positivo.

Em vez de estudarmos os k sistemas de equações do tipo (II.11), estudaremos os k sistemas de equações homogêneas derivadas, ou seja, os k sistemas de equações obtidas quando retiradas as d_i (i = 1, 2, ..., k) equações não-homogêneas. Assim, ficamos com k sistemas de equações homogêneas, sendo que cada um possui ($n - d_i$) equações e m incógnitas, (i = 1, 2, ...,k).

Assim:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \tau_{1j}\, g_{ji} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{m} \tau_{2j}\, g_{ji} = 0 \\
&\qquad\vdots \\
&\sum_{j=1}^{m} \tau_{p_{i-1}j}\, g_{ji} = 0 \qquad\qquad \text{(II.12)} \\
&\sum_{j=1}^{m} \tau_{p_i+1,j}\, g_{ji} = 0 \\
&\qquad\vdots \\
&\sum_{j=1}^{m} \tau_{nj}\, g_{ji} = 0
\end{aligned}$$

Para cada um dos sistemas (I.12), podemos ter duas hipóteses:

1ª.) $m > n - d_i$

2ª.) $m \leqslant n - d_i$

1ª.) Se $m > n - d_i$ (mais incógnitas do que equações) então, de acôrdo com a teoria elementar de sistemas de equações lineares[1], o i-ésimo sistema (II.12) terá solução.

2ª.) Se $m \leqslant n - d_i$ (número de incógnitas menor ou igual ao número de equações) então, para que o sistema (II.12) tenha solução não-trivial (pelo menos algum $g_{ji} \neq 0$) será preciso que rank $\mathcal{G}_i < m$ [1], onde $\mathcal{G}_i$ é a matriz dos coeficientes do sistema (II.12), ou seja, a matriz obtida a partir de $\mathcal{G}$ quando retiramos as d_i linhas convenientes. Neste caso, $(m - \text{rank}\,\mathcal{G}_i)$ incógnitas são arbitradas.

2.2 - TEOREMA

Uma condição necessária para o desacoplamento entrada-estado de um sistema S(A,B,C), usando-se a forma canônica racional de A e a transformação $u = G\bar{u}$ é que $m \geqslant k$ e que se existir i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ tal que $m \leqslant n - d_i$, então rank $\mathcal{G}_i < m$.

Prova:

Se $m < k$, então, $(k - m)$ blocos de estados $\bar{X}_i$ não terão componentes de entrada que os influenciem o que contraria a hipótese de desacoplamento entrada-estado.

Se existir i tal que $m \leq n - d_i$ e $\text{rank}\, \mathcal{G}_i = m$, então, de acôrdo com a teoria elementar de sistemas de equações lineares[1], o i-ésimo sistema de equações homogêneas (II.12) terá apenas a solução trivial ($g_{ji} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$) o que significa dizer que uma coluna de G é nula e, portanto, o bloco $\bar{X}_i$ não será influenciado pela entrada $\bar{u}_i$, o que contraria a hipótese de desacoplamento entrada-estado.

C.Q.D.

O teorema 2.2 é uma condição necessária para o desacoplamento entrada-estado, pois se êle fôr satisfeito, existirá uma matriz G que anula os $(n - d_i)$ elementos convenientes da i-ésima coluna de Q, $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Entretanto, nada sabemos ainda sôbre os d_i elementos restantes da i-ésima coluna de Q e, para que haja desacoplamento entrada-estado, será preciso que, pelo menos, um elemento dos d_i elementos da i-ésima coluna de Q não seja nulo.

Após o desacoplamento entrada-estado, podemos passar ao estudo da controlabilidade de $S(\oplus M, Q, R)$.

Para facilitar êste estudo, são dados, a seguir, dois teoremas.

2.3 - <u>TEOREMA</u>

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M, Q, R)$ não seja controlável é que $q_{p_{i-1}+1} = q_{p_{i-1}+2} = \ldots = q_{p_i} = 0$ para algum i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Prova:

Basta verificar que para a hipótese acima, teremos rank $C^* < n$, onde

$$C^* = \left| Q \mid \oplus M\, Q \mid \ldots \mid (\oplus M)^{n-1}\, Q \right| \tag{II.13}$$

Desenvolvendo-se as matrizes $Q, \oplus MQ, \ldots, (\oplus M)^{n-1} Q$, verificamos que, em virtude da hipótese do teorema, as d_i linhas de C^* de mesma ordem que os d_i elementos nulos de Q são nulas. Portanto,

$$\text{rank } C^* \leqslant n - d_i < n$$

C.Q.D.

2.4 - TEOREMA

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M,Q,R)$ não seja controlável é que $q_{p_{i-1}+1} = 0$ e $\alpha_{p_{i-1}+1} = 0$ para algum i $(i = 1,2,\ldots,k)$ onde $\alpha_{p_{i-1}+1}$ é o elemento do canto superior direito de M_i e $q_{p_{i-1}+1}$ é o primeiro elemento não obrigatòriamente nulo da i-ésima coluna de Q.

Prova:

Desenvolvendo-se as matrizes $Q, \oplus MQ, \ldots, (\oplus M)^{n-1} Q$, verifica-se que a $(p_{i-1}+1)$-ésima linha de C* se anula para $q_{p_{i-1}+1} = 0$ e $\alpha_{p_{i-1}+1} = 0$. Portanto, rank $C^* \leq n - 1 < n$.

C.Q.D.

3 - DESACOPLAMENTO ESTADO-SAÍDA

Nesta seção, será desenvolvido o desacoplamento estado-saída que corresponde a fazer com que cada um dos conjuntos $\bar{X}_i$ determinados por $\oplus M$ influencie uma componente de saída $\bar{y}_\ell$, mas de tal forma que cada $\bar{y}_\ell$ seja influenciado, no máximo, por um $\bar{X}_i$.

Para êste desacoplamento, foi introduzida na seção 1 a transformação $\bar{y} = Hy$.

Sejam:

$$\Gamma = CT = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pn} \end{vmatrix} \qquad H = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} & \cdots & h_{pp} \end{vmatrix} \tag{II.14}$$

É fácil verificar que a definição de desacoplamento estado-saída de $S(\oplus M,Q,R)$ é equivalente a que se tenha a matriz R com a seguinte forma:

$$
R = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \qquad d_1 \qquad & \qquad d_2 \qquad & \qquad\qquad & \qquad d_k \end{array} \\
\left| \begin{array}{cccc|ccc|ccc|ccc}
r_1 & r_2 & \cdots & r_{p_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & r_{p_1+1} & \cdots & r_{p_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{p_2+1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_{p_{k-1}} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{p_{k-1}+1} & \cdots & r_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array} \right|
\end{array}
\qquad (II.15)
$$

onde, pelo menos, um r_i de cada uma das k primeiras linhas não deve ser nulo.

Vejamos em que condições existe H tal que HCT tem a forma indicada em (II.15).

O desenvolvimento do desacoplamento estado-saída é bastante semelhante ao entrada-estado. Por isso, não entraremos em muitos detalhes.

Será preciso resolver k sistemas de equações lineares do tipo:

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{j1} \; h_{ij} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{j2} \; h_{ij} = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jp_{i-1}} \; h_{ij} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jp_{i-1}+1} \; h_{ij} = r_{p_{i-1}+1} \qquad \text{(II.16)}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jp_i} \; h_{ij} = r_{p_i}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jp_i+1} \; h_{ij} = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jn} \; h_{ij} = 0$$

A discussão das 3 hipóteses $p < k$, $p = k$, $p > k$ é análoga à já feita na seção 2 para o desacoplamento entrada-estado.

Assim, chegamos ao lema 3.1.

3.1 - LEMA

Uma condição necessária para o desacoplamento estado-saída é que $p \geq k$, onde p é o número de saídas do sistema e k o número de fatores invariantes da matriz A com grau positivo.

Aqui também será estudado o sistema de equações lineares homogêneas abaixo derivado de (II.16).

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} \gamma_{j1} \; h_{ij} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{p} \gamma_{j2} \; h_{ij} = 0 \\
&\quad \vdots \\
&\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jp_{i-1}} \; h_{ij} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jp_i+1} \; h_{ij} = 0 \\
&\quad \vdots \\
&\sum_{j=1}^{p} \gamma_{jn} \; h_{ij} = 0
\end{aligned}
\qquad (II.17)
$$

As duas hipóteses discutidas no desacoplamento entrada-estado são substituídas pelas hipóteses $p > n - d_i$ e $p \leqslant n - d_i$.

As conclusões tiradas são análogas e chegamos ao teorema:

3.2 - TEOREMA

Uma condição necessária para o desacoplamento estado-saída de um sistema $S(A,B,C)$, usando-se a forma canônica racional de A e a transformação $\bar{y} = Hy$ é que $p \geqslant k$ e que se existir i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ tal que $p \leqslant n - d_i$, então, rank $\Gamma_i < m$, onde Γ_i é a matriz obtida a partir de Γ, quando são retiradas as d_i colunas que aparecem em (II.16) e não aparecem em (II.17).

Prova:

A demonstração é análoga à do teorema 2.2.

C.Q.D.

O teorema 3.2 nos garante a existência de uma matriz H que possui zeros, onde deve possuí-los, mas não dá informações sôbre os elementos não nulos. Esta é a razão pela qual êste teorema não é uma condição necessária e suficiente.

A seguir, são dados 2 teoremas para facilitar o estudo da observabilidade de $S(\oplus M,Q,R)$.

3.3 - TEOREMA

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M,Q,R)$ não seja observável é que $r_{p_{i-1}+1} = r_{p_{i-1}+2} = \ldots = r_{p_i} = 0$ para algum i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Prova:

Basta verificar que para a hipótese acima, teremos rank $O^* < n$, onde

$$O^* = \left| \, R' \; | \oplus M'R' \; | \; \ldots \; | \; (\oplus M')^{n-1} R' \, \right| \qquad \text{(II.18)}$$

sendo R' e $\oplus M'$ respectivamente as transpostas de R e $\oplus M$.

Desenvolvendo-se as matrizes R', $\oplus M'R'$, ..., $(\oplus M')^{n-1} R'$, verificamos que, em virtude da hipótese do teorema, d_i linhas de O^* são nulas. Portanto,

$$\text{rank } O^* \leqslant n - d_i < n$$

C.Q.D.

3.4 - TEOREMA

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M,Q,R)$ não seja observável é que $\alpha_{p_{i-1}+1} = 0$ e que $r_{p_i} = - \alpha_{p_{i-1}+2} \, r_{p_{i-1}+1} - \alpha_{p_{i-1}+3} \, r_{p_{i-1}+2} - \cdots - \alpha_{p_i} \, r_{p_i - 1}$ para algum i ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Prova:

Desenvolvendo-se $R', \oplus M'R', \ldots, (\oplus M')^{n-1} R'$, verifica-se que para a hipótese acima, a linha de O^* correspondente à última linha do i-ésimo bloco M_i, ou seja a $(\sum_{k=1}^{i} d_k)$-ésima linha é combinação linear das outras $(d_i - 1)$ linhas de O^* correspondentes ao i-ésimo bloco M_i. Portanto,

$$\text{rank } O^* \leqslant n - 1 < n$$

C.Q.D.

4 - DESACOPLAMENTO ENTRADA-ESTADO-SAÍDA

De acôrdo com a definição 1.1 haverá desacoplamento entrada-estado-saída, quando houver desacoplamento entrada-estado e estado-saída. Portanto, podemos enunciar o teorema:

4.1 - TEOREMA

A condição necessária e suficiente para o desacoplamento entrada-estado-saída de um sistema S(A,B,C), usando-se a forma canônica racional de

A e as transformações $u = G\bar{u}$ e $\bar{y} = Hy$ é que

(i) $m \geq k$, $p \geq k$

(ii) Se existir $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $m \leq n - d_i$ ($p \leq n - d_i$) então, rank $\mathcal{G}_i < m$ (rank $\Gamma_i < p$)

(iii) Para nenhum $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

$q_{p_i+1} = q_{p_i+2} = \ldots = q_{p_{i+1}} = 0$ $(r_{p_i+1} = r_{p_i+2}$

$= \ldots = r_{p_{i+1}} = 0)$ onde $p_o = 0$.

onde:

n - número de componentes do vetor-estado

m - número de componentes do vetor-entrada

p - número de componentes do vetor-saída

k - número de fatores invariantes com grau positivo

d_i - grau do fator invariante $f_i(\lambda)$

$\mathcal{G}_i(\Gamma_i)$- matrizes definidas por II.12 (II.17)

q_i's - elementos de Q (II.10)

r_i's - elementos de R (II.15)

Prova:

A condição é necessária:

(i) e (ii) decorrem dos teoremas 2.2 e 3.2, respectivamente.

(iii) decorre da definição 1.1, pois se (iii) não fôr satisfeito para algum i, então, $\bar{X}_i$ não será influenciado por nenhuma entrada (não influenciará nenhuma saída) o que contraria a hipótese de desacoplamento.

A condição é suficiente:

O desacoplamento entrada-estado-saída é equivalente a ter-se Q e R com as formas apresentadas em (II.10) e (II.15), respectivamente.

(i) implica na existência do número mínimo de colunas (linhas) de Q(R).

(ii) implica que Q(R) possui zeros, onde deve possuí-los.

(iii) implica que, pelo menos, um elemento de cada uma das k primeiras linhas (colunas) de Q(R) não é nulo.

Portanto, Q e R têm as formas apresentadas em (II.10) e (II.15) e a condição é suficiente.

C.Q.D.

O teorema 4.1 resolve o problema do desacoplamento entrada-estado-saída.

5 - A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA DESACOPLADO

Nesta seção, são desenvolvidas duas formas de se determinar a função de transferência $H(s, \oplus M)$ do sistema desacoplado $S(\oplus M,Q,R)$.

De (II.9) segue imediatamente que:

$$H(s, \oplus M) = R(sI - \oplus M)^{-1} Q \qquad \text{(II.19)}$$

onde I é a matriz identidade (n x n). Mas, de acôrdo com (A.1.4)

$$\begin{vmatrix} f_n(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{n-1}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_1(s) \end{vmatrix} = P_1(s)\,(sI - \oplus M)\,P_2(s) \qquad \text{(II.20)}$$

onde $P_1(s)$ e $P_2(s)$ são produtos de matrizes elementares. Tomando-se a inversa, vem:

$$\begin{vmatrix} 1/f_n(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/f_{n-1}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/f_1(s) \end{vmatrix} = P_2^{-1}(s)(sI - \oplus M)^{-1}\,P_1^{-1}(s) \qquad \text{(II.21)}$$

onde $P_1^{-1}(s)$ e $P_2^{-1}(s)$ existem e também são produtos de matrizes elementares (vide Apêndice).

Tirando-se $(sI - \oplus M)^{-1}$ de (II.21), e levando em (II.19), vem:

$$H(s, \oplus M) = R\,P_2(s) \begin{vmatrix} 1/f_n(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/f_{n-1}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/f_1(s) \end{vmatrix} P_1(s)\,Q \qquad \text{(II.22)}$$

A relação (II.22) é de grande valor para o cálculo de $H(s, \oplus M)$, pois as matrizes $P_1(s)$ e $P_2(s)$ estão pràticamente determinadas, quando se calcula a matriz de similaridade T tal que $\oplus M = T^{-1} AT$ (vide Apêndice).

Vejamos outra forma de se calcular $H(s, \oplus M)$.

Como $(sI - \oplus M)$ é uma matriz formada por blocos na diagonal, a sua inversa também será. Podemos, então, escrever:

$$H(s, \oplus M) = R \begin{vmatrix} H^*(s, M_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H^*(s, M_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H^*(s, M_k) \end{vmatrix} Q \qquad \text{(II.23)}$$

$$\text{onde } H^*(s, M_i) = (sI_{d_i} - M_i)^{-1} \qquad \text{(II.24)}$$

I_{d_i} - matriz identidade $(d_i \times d_i)$

É fácil verificar que:

$$H(s, \oplus M) = \begin{vmatrix} R_1 H^*(s,M_1) Q_1' & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & R_k H^*(s,M_k) Q_k' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(II.25)}$$

onde R_i - i-ésima linha de R

Q_i' - i-ésima coluna de Q $\qquad i = 1, 2, ..., k$

ou, ainda, fazendo-se $H(s,M_i) = R_i\, H^*(s,M_i)\, Q_i'$

$$H(s, \oplus M) = \left|\begin{array}{cccc} H(s,M_1) & 0 \;\cdots\; 0 & & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & H(s,M_2) \cdots\cdots 0 & & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 & 0 \;\cdots\cdots & H(s,M_k) & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 \;\cdots\cdots 0 & & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 & 0 \;\cdots\cdots 0 & & 0 \cdots\cdots 0 \end{array}\right| \qquad (II.26)$$

Seja:

$$f_i(s) = s^{d_i} + \alpha_{d_i-1,i}\, s^{d_i-1} + \ldots + \alpha_{1,i}\, s + \alpha_{o,i} \qquad (II.27)$$

Levando-se em consideração que $\det H^*(s,M_i) = f_i(s)$ (vide Apêndice) e em virtude da referência[1] (pg.82-85):

$$H(s,M_i) = \frac{1}{f_i(s)} \left(R_i P_0 Q_i'\, s^{d_i-1} + R_i P_1 Q_i'\, s^{d_i-2} + \ldots + R_i P_{d_i-1} Q_i' \right) \qquad (II.28)$$

onde: $\quad P_j = \oplus M\, P_{j-1} + \alpha_{d_i-j,i}\, I_{d_i} \qquad j = 1, 2, \ldots, d_i-1 \qquad (II.29)$

$P_0 = I_{d_i}$

Portanto, de (II.26), (II.27), (II.28) e (II.29), calculamos $H(s, \oplus M)$.

Assim, temos duas formas para o cálculo de $H(s, \oplus M)$, sendo que a primeira é mais direta que a segunda, pois no cálculo da matriz de similaridade T temos meios de determinar $P_1(s)$ e $P_2(s)$ diretamente.

6 - UM EXEMPLO

Seja o sistema S(A,B,C) abaixo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde
$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -23 & 12 \end{vmatrix}$$

Calculando-se os fatores invariantes de A, obtemos:

$$f_1(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$

$$f_2(\lambda) = (\lambda + 1)$$

$$f_3(\lambda) = 1$$

$$f_4(\lambda) = 1$$

Portanto, a forma canônica racional de A é:

$$\oplus\, M = T^{-1}AT = \left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

A transformação de similaridade é:

$$T = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & -5 \\ 1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 11 & -23 & 12 \end{array}\right|$$

E a sua inversa:

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 14 & -1 & 1 & -2 \\ 17 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Usando-se as transformação $u(t) = G\,\bar{u}(t)$ e $\bar{y}(t) = H\,y(t)$, obtemos:

$$\dot{\bar{x}} = \oplus M\,\bar{x} + \zeta\, G\,\bar{u}\,(t)$$

$$\bar{y}\,(t) = H\,\Gamma\,\bar{x}$$

Para o nosso exemplo, temos:

$d_1 = 3$

$d_2 = 1$

$k = 2$

$m = 2$

$n = 4$

$p = 2$

Usando-se o teorema 4.1, vemos que para que o desacoplamento seja possível, precisamos:

$$\text{rank } \mathcal{C}_2 < 2$$

$$\text{rank } \Gamma_2 < 2$$

Vejamos se estas condições são satisfeitas:

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \Gamma = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{C}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{rank } \mathcal{C}_2 = 1 < 2 \qquad \text{rank } \Gamma_2 = 1 < 2$$

O desacoplamento é possível.

Determinemos G e Q

$$Q = \mathcal{G}\, G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} \\ 2g_{11} & 2g_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c:c} q_1 & 0 \\ q_2 & 0 \\ q_3 & 0 \\ \hdashline 0 & q_4 \end{array}\right|$$

Arbitrando-se $g_{11} = 1$ e $g_{22} = -1$, obtemos

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad Q = \left|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right|$$

Determinemos H e R

$$R = H\,\Gamma = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 30h_{11} & 2h_{11} & h_{11} & -2h_{11}+h_{12} \\ 30h_{21} & 2h_{21} & h_{21} & -2h_{21}+h_{22} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc:c} r_1 & r_2 & r_3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & r_4 \end{array}\right|$$

Arbitrando-se $h_{11} = 1$ e $h_{22} = 1$, obtemos

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad R = \left|\begin{array}{ccc|c} 30 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

O sistema desacoplado fica

$$\dot{\bar{x}} = \oplus M \, \bar{x} + Q \, \bar{u}$$

$$\bar{y} = R \, \bar{x}$$

com

$$\oplus M = \left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right| \qquad R = \left|\begin{array}{ccc|c} 30 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

Para o cálculo de $H(s, \oplus M)$, podemos usar, por exemplo, (II.22). Assim, calculamos:

$$P_1(s) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s & s^2 & 0 \end{vmatrix}$$

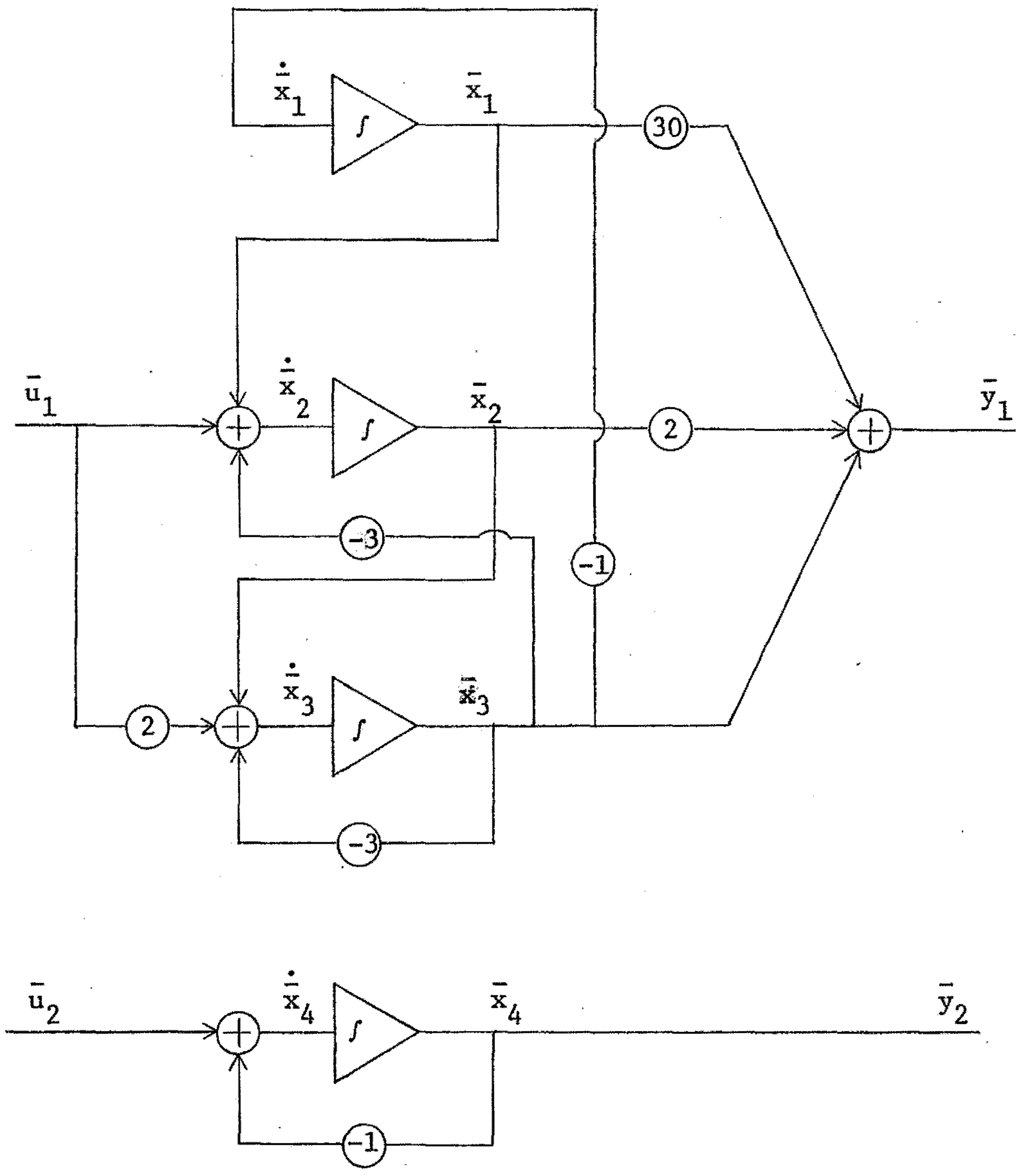
$$P_2(s) = \begin{vmatrix} 1 & s & 0 & s^2+3s+3 \\ 0 & 1 & 0 & s+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Levando-se em (II.22), chegamos a:

$$H(s, \oplus M) = \begin{vmatrix} \dfrac{4s^2-65s-34}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{vmatrix}$$

Finalmente, podemos representar $S(\oplus M,Q,R)$ por:

Podemos representar S(⊕ M,Q,R) por:



CAPÍTULO III

DOIS PROGRAMAS DE COMPUTADOR PARA O DESACOPLAMENTO

1. - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são desenvolvidos dois programas para computador. O primeiro determina os fatôres invariantes da matriz A de S(A,B,C), assim como a matriz de similaridade T tal que $\oplus M = T^{-1} A\ T$. O segundo determina para uma matriz retangular (n x m), se o "rank" é igual ou menor que min (n,m) pois é isto que queremos saber quando aplicamos o teorema (II.4.1) que fornece a condição necessária e suficiente para o desacoplamento entrada-estado-saída.

O computador utilizado foi um IBM-1130 e os programas foram desenvolvidos em FORTRAN.

2. - FATÔRES INVARIANTES E MATRIZ DE SIMILARIDADE

O programa que calcula os fatôres invariantes e a forma canônica racional de A, foi desenvolvido utilizando-se as referências[1 e 2].

Para o cálculo dos fatôres invariantes, empregou-se o método apresentado por Gill[2], e para a matriz de similaridade, o método descrito no Apêndice.

2.1 - FATÔRES INVARIANTES

Queremos calcular os fatôres invariantes de A. De acôrdo com (A.1.7), os fatôres invariantes de A, são fatôres invariantes da matriz característica $(\lambda I-A)$.

Sejam as operações elementares de linha (coluna) que foram definidas em (A.2)((A.3)), e que serão representadas por OEL (OEC). Sabemos que matrizes equivalentes (A.1.3) têm os mesmos fatôres invariantes - (A.1.5) e, portanto, podemos aplicar as operações elementares em $(\lambda I-A)$, que não mudaremos seus fatôres invariantes. Após uma série de operações elementares, transformaremos $(\lambda I-A)$ numa matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são os fatôres invariantes de A(A.1.4).

Seja $a_{ik}(\lambda)$ um elemento de $(\lambda I-A)$ ou de qualquer outra λ-matriz em que $(\lambda I-A)$ se transformará, não-nulo e de grau mínimo. Se $a_{ik}(\lambda)$ não divide todos os outros elementos, seja $a_{jk}(\lambda)$ um elemento de $(\lambda I-A)$ não divisível por $a_{ik}(\lambda)$. Suponhamos que $a_{ik}(\lambda)$ e $a_{jk}(\lambda)$ pertencem à mesma coluna.

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ i \\ \\ j \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & k & & \ell & \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{ik}(\lambda) & \cdots & a_{i\ell}(\lambda) & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{jk}(\lambda) & \cdots & a_{j\ell}(\lambda) & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\end{array}\right|
\end{array}
$$

Pelo algorítmo da divisão:

$$a_{jk}(\lambda) = q_{jk}(\lambda)\ a_{ik}(\lambda) + a'_{jk}(\lambda)$$

onde

$$\text{grau}\ (a'_{jk}(\lambda)) < \text{grau}\ (a_{jk}(\lambda))$$

Portanto, por OEL(2)(segunda operação elementar de linha), podemos somar à j-ésima linha a i-ésima linha multiplicada por $(-q_{jk}(\lambda))$. Assim, o elemento $a_{jk}(\lambda)$ fica substituido por $a'_{jk}(\lambda)$ que possui grau menor.Uma operação similar pode ser aplicada quando os dois elementos pertencem à mesma linha. Se $a_{ik}(\lambda)$ divide todos os elementos de sua linha e de sua coluna, mas não divide um elemento $a_{j\ell}(\lambda)$ de outra posição, a operação pode ser efetuada através de um elemento que pertença à i-ésima linha e ℓ-ésima coluna (ou j-ésima linha e k-ésima coluna). Assim:

$$a_{i\ell}(\lambda) = q_{i\ell}(\lambda)\ a_{ik}(\lambda)$$

$$a_{j\ell}(\lambda) = q_{j\ell}(\lambda)\ a_{ik}(\lambda) + a'_{j\ell}(\lambda)$$

Daí tiramos:

$$a_{j\ell}(\lambda) = \frac{q_{j\ell}(\lambda)}{q_{i\ell}(\lambda)}\ a_{i\ell}(\lambda) + a'_{j\ell}(\lambda)$$

Portanto, por OEL(2), podemos somar à j-ésima linha a i-ésima linha multiplicada por $(-q_{j\ell}(\lambda)/q_{i\ell}(\lambda))$. Assim $a_{j\ell}(\lambda)$ fica substituido por $a'_{j\ell}(\lambda)$ que possui grau menor.

O processo é continuado até que seja encontrado um elemento que divida todos os elementos da matriz (isto é garantido, pois na pior das hipóteses êste elemento será uma constante). Por OEL(3) e OEC(3) êste elemento pode ser levado ao canto superior esquerdo da matriz. Como êste elemento divide tôda a matriz poderemos por meio de OEC(2)'s e OEL(2)'s anular todos os outros elementos da primeira linha e primeira coluna da matriz, cuja forma será:

$$\left|\begin{array}{c|c} f_n(\lambda) & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1(\lambda) \\ 0 & \end{array}\right|$$

Podemos agora repetir o processo para $A_1(\lambda)$. Chegaremos a uma matriz da forma:

$$\left|\begin{array}{cc|c} f_n(\lambda) & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & f_{n-1}(\lambda) & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A_2(\lambda) \\ 0 & 0 & \end{array}\right|$$

Continuando-se o processo, chegaremos a:

$$\begin{vmatrix} f_n(\lambda) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_{n-1}(\lambda) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & f_1(\lambda) \end{vmatrix}$$

onde $f_i(\lambda)(i=1,2,\ldots,n)$ são os fatôres invariantes de A.

<u>OBSERVAÇÃO</u>:

Para o caso em que o elemento $a_{ik}(\lambda)$ divide tôda linha e tôda coluna mas não divide um elemento de outra posição, podemos usar como elemento intermediário $a_{i\ell}(\lambda)$ ou $a_{jk}(\lambda)$. Foi escolhido, para o programa, $a_{i\ell}(\lambda)$ pois como se verá adiante, isto economizará operações quando fôr feito o cálculo de T(matriz de similaridade).

Quando $a_{i\ell}(\lambda)$ é nulo, não podemos usá-lo para esta operação. Neste caso somamos à i-ésima linha a j-ésima linha e recomeçamos o processo.

2.2 - <u>MATRIZ DE SIMILARIDADE</u>

Após o cálculo dos fatôres invariantes, deseja-se calcular a matriz de similaridade T tal que $\oplus M = T^{-1}A\ T$. Uma das formas de se calcular

T está desenvolvida no Apêndice.

Deve-se notar que o cálculo da matriz de similaridade, depende do conhecimento das OEC's efetuadas em $(\lambda I-A)$ quando se calculam os fatôres invariantes. Esta é a razão pela qual o programa desenvolvido determina simultâneamente os fatôres invariantes e a matriz de similaridade.

2.3 - O PROGRAMA

O programa desenvolvido pode ser empregado para matrizes quadradas A com dimensão máxima (10 x 10). Com pequenas modificações, poderemos utilizá-lo para matrizes com dimensão maior.

Foram utilizadas 2 subrotinas científicas IBM:

PMPY - multiplica polinômios

PDIV - divide polinômios

Foram também desenvolvidas 2 subrotinas:

GRAPO - cálcula os graus dos polinômios de uma λ-matriz

PROMA - multiplica duas matrizes quadradas.

A utilização do programa é muito simples. Para uma matriz A(nxn) utilizam-se (n+1) cartões de entrada. O primeiro fornece n no formato I2. Os outros cartões fornecem as n linhas da matriz em ordem crescente de linha. Cada cartão fornece os n elementos de uma linha em ordem crescente de coluna, sendo que, cada elemento, está representado no formato F7.3.

Nas próximas páginas temos a listagem do programa, assim como, o resultado para duas matrizes.

```
PAGE   1    P 163044

// JOB    00FF 10FF                                         P 163044

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        00FF        00FF        0000
  0001        10FF        10FF        0001
                          2013        0002

V2 M05   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FORTRAN
**
* LIST SOURCE PROGRAM
* ONE WORD INTEGERS
```

```
PAGE   2    P 163044

      SUBROUTINE GRAPO(MATRX,GRAU,M,TOL)
C     GRAU DOS ELEMENTOS DE UMA MATRIZ POLINOMIAL
      INTEGER GRAU(10,10)
      REAL MATRX(10,10,10)
      N=M+1
      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,M
      DO 4 K=1,N
      K1=N+1-K
      IF(ABS(MATRX(I,J,K1))-TOL)2,2,1
 1    GRAU(I,J)=K1-1
      GO TO 5
 2    IF(K-N)4,3,3
 3    GRAU(I,J)=0
 4    CONTINUE
 5    CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR GRAPO
 COMMON      0  VARIABLES      6  PROGRAM    126

 END OF COMPILATION

// DUP

*STORE      WS  UA  GRAPO
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET


// FORTRAN
**
* LIST SOURCE PROGRAM
* ONE WORD INTEGERS
```

```
PAGE   3    P 163044

      SUBROUTINE PROMA(A,B,R,M)
C     PRODUTO DE DUAS MATRIZES QUADRADAS
      DIMENSION A(10,10),B(10,10),R(10,10)
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,M
      SOMA=0.
      DO 10 K=1,M
      R(I,J)=SOMA+A(I,K)*B(K,J)
      SOMA=R(I,J)
 10   CONTINUE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR PROMA
 COMMON      0  VARIABLES      8  PROGRAM    104

 END OF COMPILATION

// DUP

*STORE       WS  UA  PROMA
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET


// FORTRAN
**
* IOCS(2501 READER,1403 PRINTER)
* LIST SOURCE PROGRAM
* ONE WORD INTEGERS
```

```
C     INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL
      REAL MATRX(10,10,10),MATR(10,10)
      INTEGER GRAU(10,10),CONTA,COL1(100),COL2(100),DIMFI(10)
      DIMENSION X(10),Y(10),P(10),Z(20),Q(10),S(10)
      DIMENSION III(100),POL(100,10),IDPOL(100),ICONT(2),ROL(10)
      DIMENSION AA(10,10,10),R(10,10),A(10,10),B(10,10)
C
C     PRIMEIRA PARTE.MATRIZ(XI-A)
C     ESCOLHA DO ELEMENTO DE MENOR GRAU DA MATRIZ POLINOMIAL
      READ(8,40) M
 40   FORMAT(I2)
      DO 38 I=1,10
      DO 38 J=1,10
      DO 38 K=1,10
 38   MATRX(I,J,K)=0.
      READ(8,41)((MATRX(I,J,1),J=1,10),I=1,M)
 41   FORMAT(10F7.3)
      WRITE(5,42)
 42   FORMAT('1',///,' MATRIZ A ',//)
      DO 43 I=1,M
      WRITE(5,43)(MATRX(I,J,1),J=1,M)
 43   FORMAT(10F8.2)
      DO 44 I=1,M
      DO 44 J=1,M
 44   MATRX(I,J,1)=-MATRX(I,J,1)
      DO 45 I=1,M
 45   MATRX(I,I,2)=1.
      TOL=0.001
      IJ=1
      N=M+1
      CONTA=0
      IJK=1
 20   MINGR=N
      DO 31 I=IJ,M
      DO 31 J=IJ,M
      DO 30 K=1,N
      K1=N+1-K
      IF(ABS(MATRX(I,J,K1))-TOL)32,32,10
 10   GRAU(I,J)=K1-1
      IF(GRAU(I,J)-MINGR)11,11,31
 11   MINGR=GRAU(I,J)
      IMIN=I
      JMIN=J
      GO TO 31
 32   IF(K-N)30,33,33
 33   GRAU(I,J)=0
 30   CONTINUE
 31   CONTINUE
      IF(MINGR)150,150,100
C
C     TESTE DA LINHA
```

```
PAGE    5     P 163044

 100   DO 113 J=IJ,M
       IF(JMIN-J)110,113,110
 110   DO 111 I1=1,N
 111   X(I1)=MATRX(IMIN,J,I1)
       DO 112 I2=1,N
 112   Y(I2)=MATRX(IMIN,JMIN,I2)
       IDIMX=GRAU(IMIN,J)+1
       IDIMY=MINGR+1
       CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
       IDIP=IDIMP+1
       DO 137 K2=IDIP,10
 137   P(K2)=0.
C      INICIO DO TESTE PARA SABER SE HA RESTO
       DO 108 I3=1,IDIMX
       IF(ABS(X(I3))-TOL)108,108,114
 108   CONTINUE
 113   CONTINUE
C      NAO HA RESTO
       GO TO 201
C      HA RESTO. INICIO DO PRODUTO DA COLUNA MINIMA PELO QUOCIENTE
 114   CONTA=CONTA+1
       III(CONTA)=-1
       DO 166 I=IJ,M
       IF(GRAU(I,JMIN))168,168,167
 168   IF(ABS(MATRX(I,JMIN,1))-TOL)166,166,167
 167   DO 115 K=1,N
 115   Y(K)=MATRX(I,JMIN,K)
       IDIMY=GRAU(I,JMIN)+1
       CALL PMPY(Z,IDIMZ,P,IDIMP,Y,IDIMY)
       IDIZ=IDIMZ+1
       DO 140 K2=IDIZ,20
 140   Z(K2)=0.
       DO 116 K2=1,N
 116   MATRX(I,J,K2)=MATRX(I,J,K2)-Z(K2)
 166   CONTINUE
       COL1(CONTA)=J
       COL2(CONTA)=JMIN
       DO 601 N1=1,IDIMP
 601   POL(CONTA,N1)=P(N1)
       IDPOL(CONTA)=IDIMP
       IDP=IDIMP+1
       DO 651 N1=IDP,10
 651   POL(CONTA,N1)=0.
C      TESTE DO GRAU DO NOVO POLINOMIO ( HOUVE RESTO )
       DO 120 K3=1,IDIMX
       K4=IDIMX+1-K3
       IF(ABS(MATRX(IMIN,J,K4))-TOL)120,120,117
 117   GRAU(IMIN,J)=K4-1
       IF(GRAU(IMIN,J))125,118,125
 120   CONTINUE
C      NOVO GRAU E ZERO
```

```
 118   JMIN=J
       MINGR=0
       GO TO 150
C      NOVO GRAU DIFERENTE DE ZERO
 125   JMIN=J
       MINGR=GRAU(IMIN,J)
C      CALCULO DO GRAU DA NOVA COLUNA
       DO 131 I=IJ,M
       DO 130 K=1,N
       K1=N+1-K
       IF(ABS(MATRX(I,JMIN,K1))-TOL)132,132,135
 135   GRAU(I,JMIN)=K1-1
       GO TO 131
 132   IF(K-N)130,133,133
 133   GRAU(I,JMIN)=0
 130   CONTINUE
 131   CONTINUE
       GO TO 100
C
C      TESTE DA COLUNA
 201   DO 213 I=IJ,M
       IF(IMIN-I)210,213,210
 210   DO 211 J1=1,N
 211   X(J1)=MATRX(I,JMIN,J1)
       DO 212 J2=1,N
 212   Y(J2)=MATRX(IMIN,JMIN,J2)
       IDIMX=GRAU(I,JMIN)+1
       IDIMY=MINGR+1
       CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
       DO 208 J3=1,IDIMX
       IF(ABS(X(J3))-TOL)208,208,214
 208   CONTINUE
 213   CONTINUE
       GO TO 160
 214   DO 266 J=IJ,M
       IF(GRAU(IMIN,J))268,268,267
 268   IF(ABS(MATRX(IMIN,J,1))-TOL)266,266,267
 267   DO 215 K=1,N
 215   Y(K)=MATRX(IMIN,J,K)
       IDIMY=GRAU(IMIN,J)+1
       CALL PMPY (Z,IDIMZ,P,IDIMP,Y,IDIMY)
       DO 216 K2=1,N
 216   MATRX(I,J,K2)=MATRX(I,J,K2)-Z(K2)
 266   CONTINUE
       DO 220 K3=1,IDIMX
       K4=IDIMX+1-K3
       IF(ABS(MATRX(I,JMIN,K4))-TOL)220,220,217
 217   GRAU(I,JMIN)=K4-1
       IF(GRAU(I,JMIN))225,218,225
 220   CONTINUE
 218   IMIN=I
```

```
      MINGR=0
      GO TO 150
 225  IMIN=I
      MINGR=GRAU(I,JMIN)
C     CALCULO DO GRAU DA NOVA LINHA
      DO 231 J=IJ,M
      DO 230 K=1,N
      K1=N+1-K
      IF(ABS(MATRX(IMIN,J,K1))-TOL)232,232,235
 235  GRAU(IMIN,J)=K1-1
      GO TO 231
 232  IF(K-N)230,233,233
 233  GRAU(IMIN,J)=0
 230  CONTINUE
 231  CONTINUE
      GO TO 100
C
C     TESTE LINHA-COLUNA
 160  DO 333 I=IJ,M
      DO 313 J=IJ,M
      IF(IMIN-I)309,333,309
 309  IF(JMIN-J)305,313,305
 305  IDIMX=GRAU(I,J)+1
      IDIMY=MINGR+1
      IF(IDIMX-1)313,313,310
C     INICIO DA PRIMEIRA DIVISAO
 310  DO 311 L=1,N
 311  X(L)=MATRX(I,J,L)
      DO 312 L=1,N
 312  Y(L)=MATRX(IMIN,JMIN,L)
      CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
      IDIMR=IDIMX
      DO 313 L=1,IDIMX
      IF(ABS(X(L))-TOL)313,313,314
 313  CONTINUE
 333  CONTINUE
C     HA RESTO
      GO TO 150
 314  DO 315 L=1,IDIMP
C     PRIMEIRO QUOCIENTE EM Q
 315  Q(L)=P(L)
      IDIMQ=IDIMP
C     INICIO DA SEGUNDA DIVISAO
      DO 316 L=1,N
 316  X(L)=MATRX(IMIN,J,L)
      IDIMX=GRAU(IMIN,J)+1
      IF(IDIMX-1)380,380,370
 380  IF(ABS(MATRX(IMIN,J,1))-TOL)381,381,370
 381  DO 385 J1=IJ,M
      DO 385 K=1,N
 385  MATRX(IMIN,J1,K)=MATRX(IMIN,J1,K)+MATRX(I,J1,K)
```

```
      GO TO 20
 370  CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
      DO 317 L=1,IDIMP
C     SEGUNDO QUOCIENTE EM S
 317  S(L)=P(L)
      IDIMS=IDIMP
      DO 320 J1=IJ,M
      DO 318 L=1,N
 318  Y(L)=MATRX(IMIN,J1,L)
      IDIMY=GRAU(IMIN,J1)+1
      CALL PMPY (Z,IDIMZ,Q,IDIMQ,Y,IDIMY)
      CALL PDIV (P,IDIMP,Z,IDIMZ,S,IDIMS,TOL,IER)
      IDIP=IDIMP+1
      DO 319 L=IDIP,10
 319  P(L)=0.
      DO 320 L=1,N
 320  MATRX(I,J1,L)=MATRX(I,J1,L)-P(L)
C     TESTE DO GRAU DO NOVO POLINOMIO ( HOUVE RESTO )
      DO 330 K3=1,IDIMR
      K4=IDIMR+1-K3
      IF(ABS(MATRX(I,J,K4))-TOL)330,330,327
 327  GRAU(I,J)=K4-1
      IF(GRAU(I,J))325,328,325
 330  CONTINUE
 328  IMIN=I
      JMIN=J
      MINGR=0
      GO TO 150
C     O NOVO POLINOMIO TEM GRAU ZERO
 325  JMIN=J
      IMIN=I
      MINGR=GRAU(I,J)
C     CALCULO DO GRAU DA NOVA LINHA
      DO 331 J=IJ,M
      DO 340 K=1,N
      K1=N+1-K
      IF(ABS(MATRX(IMIN,J,K1))-TOL)332,332,335
 335  GRAU(IMIN,J)=K1-1
      GO TO 331
 332  IF(K-N)340,338,338
 338  GRAU(IMIN,J)=0
 340  CONTINUE
 331  CONTINUE
C     VOLTA AO TESTE DE LINHA
      GO TO 100
C
C     TRANSFERENCIA DO POLINOMIO MINIMO PARA SUA POSICAO
C     TRANSFERENCIA LINHA
 150  IF(IMIN-IJ)401,405,401
 401  DO 404 J=IJ,M
      DO 404 K=1,N
```

```
      PAT=MATRX(IMIN,J,K)
      MATRX(IMIN,J,K)=MATRX(IJ,J,K)
 404  MATRX(IJ,J,K)=PAT
C     TRANSFERENCIA COLUNA
 405  IF(JMIN-IJ)606,410,606
 606  CONTA=CONTA+1
      III(CONTA)=1
      COL1(CONTA)=IJ
      COL2(CONTA)=JMIN
      DO 607 N1=1,10
 607  POL(CONTA,N1)=0.
      IDPOL(CONTA)=0
      DO 409 I=IJ,M
      DO 409 K=1,N
      PAT=MATRX(I,JMIN,K)
      MATRX(I,JMIN,K)=MATRX(I,IJ,K)
 409  MATRX(I,IJ,K)=PAT
C     CALCULO DO GRAU DOS POLINOMIOS DA MATRIZ TRANSFORMADA
 410  CALL GRAPO(MATRX,GRAU,M,TOL)
C
C     TRANSFORMACAO DOS ELEMENTOS DA LINHA EM ZEROS
      IJ1=IJ+1
      DO 425 J=IJ1,M
      DO 420 K1=1,N
 420  X(K1)=MATRX(IJ,J,K1)
      DO 421 K1=1,N
 421  Y(K1)=MATRX(IJ,IJ,K1)
      IDIMX=GRAU(IJ,J)+1
      IDIMY=GRAU(IJ,IJ)+1
      CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
      IDIP=IDIMP+1
      DO 422 K2=IDIP,10
 422  P(K2)=0.
      CONTA=CONTA+1
      III(CONTA)=-1
      COL1(CONTA)=J
      COL2(CONTA)=IJ
      DO 602 N1=1,IDIMP
 602  POL(CONTA,N1)=P(N1)
      IDPOL(CONTA)=IDIMP
      IDP=IDIMP+1
      DO 652 N1=IDP,10
 652  POL(CONTA,N1)=0.
      DO 424 I=IJ,M
      DO 427 K1=1,N
 427  Y(K1)=MATRX(I,IJ,K1)
      IDIMY=GRAU(I,IJ)+1
      CALL PMPY(Z,IDIMZ,P,IDIMP,Y,IDIMY)
      IDIZ=IDIMZ+1
      DO 423 K2=IDIZ,10
 423  Z(K2)=0.
```

```
      DO 424 K=1,N
  424 MATRX(I,J,K)=MATRX(I,J,K)-Z(K)
  425 CONTINUE
C
C     TRANSFORMACAO DOS ELEMENTOS DA COLUNA EM ZEROS
      DO 426 I=IJ1,M
      DO 426 K=1,N
  426 MATRX(I,IJ,K)=0.
      DO 428 K1=1,N
  428 Y(K1)=MATRX(IJ,IJ,K1)
      IDIMY=GRAU(IJ,IJ)+1
      X(1)=1./Y(IDIMY)
      IDIMX=1
      CALL PMPY(Z,IDIMZ,X,IDIMX,Y,IDIMY)
      IDIZ=IDIMZ+1
      DO 430 K1=IDIZ,10
  430 Z(K1)=0.
      DO 437 K2=1,N
  437 MATRX(IJ,IJ,K2)=Z(K2)
C     CALCULO DO GRAU DOS POLINOMIOS DA NOVA MATRIZ
      CALL GRAPO(MATRX,GRAU,M,TOL)
      IF((IJ-M)+1)431,432,432
  431 IJ=IJ+1
      GO TO 20
  432 IDM=GRAU(M,M)+1
      DO 434 K=1,IDM
  434 MATRX(M,M,K)=MATRX(M,M,K)/MATRX(M,M,IDM)
      IF(IJK-1)429,429,435
  429 WRITE(5,433)
  433 FORMAT(///)
      DO 461 I=1,M
      DO 461 K=1,10
  461 MATR(I,K)=MATRX(I,I,K)
      DO 462 I=1,M
      DO 462 K=1,10
      IF(MATR(I,K))463,462,464
  463 MATR(I,K)=MATR(I,K)-0.0005
      GO TO 462
  464 MATR(I,K)=MATR(I,K)+0.0005
  462 CONTINUE
      WRITE(5,440)
  440 FORMAT(' FATORES INVARIANTES ',//)
      WRITE(5,441)
  441 FORMAT(' GRAUO ',3X,' 1 ',3X,' 2 ',3X,' 3 ',3X,' 4 ',3X,' 5 ',
     13X,' 6 ',3X,' 7 ',3X,' 8 ',3X,' 9 ',/)
      WRITE(5,436)((MATR(I,K),K=1,10),I=1,M)
  436 FORMAT(10F6.2)
  435 ICONT(IJK)=CONTA
      IJK=IJK+1
      IF(IJK-2)608,608,700
C     CARREGAMENTO DOS FATORES INVARIANTES EM MATR
```

```
 608  DO 610 JJ=1,M
      DO 610 K=1,N
      M1=M-JJ+1
 610  MATR(M1,K)=MATRX(JJ,JJ,K)
C     CALCULO DAS DIMENSOES DOS FATORES INVARIANTES
      DO 611 I=1,M
      M2=M-I+1
 611  DIMFI(M2)=GRAU(I,I)+1
C     CALCULO DO NUMERO DE F. I. COM GRAU DIFERENTE DE ZERO
      NFI=0
      DO 612 I=1,M
      NFI=NFI+DIMFI(I)-1
      IF(NFI-M)612,613,613
 613  NFIDZ=I
      GO TO 614
 612  CONTINUE
      NFIDZ=M
C
C     SEGUNDA PARTE.MATRIZ(XI-(+)M)
 614  DO 615 I=1,10
      DO 615 J=1,10
      DO 615 K=1,10
 615  MATRX(I,J,K)=0.
      DO 620 I=1,M
 620  MATRX(I,I,2)=1.
      IC=0
      DO 630 JJ=1,NFIDZ
      IDFI=DIMFI(JJ)-1
      DO 625 I=1,IDFI
      I1=I+IC
      I2=IDFI+IC
 625  MATRX(I1,I2,1)=MATR(JJ,I)
      IF(IDFI-1)629,629,626
 626  DO 627 I=2,IDFI
      I1=I+IC
      I2=I-1+IC
 627  MATRX(I1,I2,1)=-1
 629  IC=IC+IDFI
 630  CONTINUE
      IJ=1
      GO TO 20
C
C     CALCULO DE Q1(X)
C     OPERACOES ELEMENTARES DA PRIMEIRA PARTE
 700  DO 710 I=1,10
      DO 710 J=1,10
      DO 710 K=1,10
 710  MATRX(I,J,K)=0.
      DO 715 I=1,M
 715  MATRX(I,I,1)=1.
      IC=ICONT(1)
```

```
      DO 800 L=1,IC
      CALL GRAPO(MATRX,GRAU,M,TOL)
      IF(III(L))720,720,730
C     OPERACAO TIPO 1 ( TROCA DE COLUNAS )
 720  ICOL1=COL1(L)
      ICOL2=COL2(L)
      IDROL=IDPOL(L)
      DO 721 I=1,IDROL
 721  ROL(I)=POL(L,I)
      DO 725 I=1,M
      DO 723 K=1,N
 723  X(K)=MATRX(I,ICOL2,K)
      IDIMX=GRAU(I,ICOL2)+1
      CALL PMPY(Z,IDIMZ,X,IDIMX,ROL,IDROL)
      IDIZ=IDIMZ+1
      DO 722 K1=IDIZ,20
 722  Z(K1)=0.
      DO 724 K1=1,N
 724  MATRX(I,ICOL1,K1)=MATRX(I,ICOL1,K1)-Z(K1)
 725  CONTINUE
      GO TO 800
C     OPERACAO TIPO 2 ( COLUNA1-POLINOMIO*COLUNA2)
 730  ICOL1=COL1(L)
      ICOL2=COL2(L)
      DO 731 I=1,M
      DO 731 K=1,N
      PAT=MATRX(I,ICOL1,K)
      MATRX(I,ICOL1,K)=MATRX(I,ICOL2,K)
 731  MATRX(I,ICOL2,K)=PAT
 800  CONTINUE
C
C     CALCULO DE Q(X). OPERACOES ELEMENTARES DA SEGUNDA PARTE
      IC=ICONT(2)-ICONT(1)
      ID=ICONT(2)+1
      DO 900 L=1,IC
      ID1=ID-L
      CALL GRAPO(MATRX,GRAU,M,TOL)
      IF(III(ID1))820,820,830
 820  ICOL1=COL1(ID1)
      ICOL2=COL2(ID1)
      IDROL=IDPOL(ID1)
      DO 821 I=1,IDROL
 821  ROL(I)=POL(ID1,I)
      DO 825 I=1,M
      DO 823 K=1,N
 823  X(K)=MATRX(I,ICOL2,K)
      IDIMX=GRAU(I,ICOL2)+1
      CALL PMPY(Z,IDIMZ,X,IDIMX,ROL,IDROL)
      IDIZ=IDIMZ+1
      DO 822 K1=IDIZ,20
 822  Z(K1)=0.
```

```
      DO 824 K1=1,N
  824 MATRX(I,ICOL1,K1)=MATRX(I,ICOL1,K1)+Z(K1)
  825 CONTINUE
      GO TO 900
  830 ICOL1=COL1(ID1)
      ICOL2=COL2(ID1)
      DO 831 I=1,M
      DO 831 K=1,N
      PAT=MATRX(I,ICOL1,K)
      MATRX(I,ICOL1,K)=MATRX(I,ICOL2,K)
  831 MATRX(I,ICOL2,K)=PAT
  900 CONTINUE
C     CALCULO DO GRAU MAXIMO DE Q(X)
      CALL GRAPO(MATRX,GRAU,M,TOL)
      MAXGR=0
      DO 1115 I=1,M
      DO 1115 J=1,M
      IF(GRAU(I,J)-MAXGR)1115,1110,1110
 1110 MAXGR=GRAU(I,J)
 1115 CONTINUE
      IF(MAXGR)1210,1210,1120
 1120 DO 1105 I=1,10
      DO 1105 J=1,10
      DO 1105 K=1,10
 1105 AA(I,J,K)=0.
C     CARREGAMENTO DE (+M) EM AA(I,J,1)
      IC=0
      DO 1130 JJ=1,NFIDZ
      IDFI=DIMFI(JJ)-1
      DO 1125 I=1,IDFI
      IA=I+IC
      IB=IDFI+IC
 1125 AA(IA,IB,1)=-MATR(JJ,I)
      IF(IDFI-1)1129,1129,1126
 1126 DO 1127 I=2,IDFI
      IA=I+IC
      IB=I-1+IC
 1127 AA(IA,IB,1)=1.
 1129 IC=IC+IDFI
 1130 CONTINUE
C     CALCULO DAS POTENCIAS DE (+M) EM AA(I,J,K)
      DO 1150 I=1,M
      DO 1150 J=1,M
      A(I,J)=AA(I,J,1)
 1150 R(I,J)=AA(I,J,1)
      MAX=MAXGR-1
      DO 1180 L=1,MAX
      L1=L+1
      DO 1160 I=1,M
      DO 1160 J=1,M
 1160 B(I,J)=R(I,J)
```

```
PAGE  14    P 163044

      CALL PROMA(A,B,R,M)
      DO 1170 I=1,M
      DO 1170 J=1,M
 1170 AA(I,J,L1)=R(I,J)
 1180 CONTINUE
      DO 1200 L=1,MAXGR
      L1=L+1
      DO 1190 I=1,M
      DO 1190 J=1,M
      A(I,J)=MATRX(I,J,L1)
 1190 B(I,J)=AA(I,J,L)
      CALL PROMA(A,B,R,M)
      DO 1195 I=1,M
      DO 1195 J=1,M
 1195 MATRX(I,J,1)=MATRX(I,J,1)+R(I,J)
 1200 CONTINUE
 1210 DO 1205 I=1,M
      DO 1205 J=1,M
      IF(MATRX(I,J,1))1206,1207,1207
 1206 MATRX(I,J,1)=MATRX(I,J,1)-0.0005
      GO TO 1205
 1207 MATRX(I,J,1)=MATRX(I,J,1)+0.0005
 1205 CONTINUE
      WRITE(5,1212)
 1212 FORMAT(///,' MATRIZ DE SIMILARIDADE ',//)
      DO 1213 I=1,M
      WRITE(5,1211)(MATRX(I,J,1),J=1,M)
 1211 FORMAT(10F8.2)
 1213 CONTINUE
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON      0  VARIABLES   7532  PROGRAM   4978

 END OF COMPILATION

// XEQ
```

MATRIZ A

1.00	-1.00	1.00	-1.00
-3.00	3.00	-5.00	4.00
8.00	-4.00	3.00	-4.00
15.00	-10.00	11.00	-11.00

FATORES INVARIANTES

GRAUO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	3.00	3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

MATRIZ DE SIMILARIDADE

-1.00	0.00	1.00	1.00
4.00	0.00	-5.00	-4.00
-5.00	1.00	3.00	5.00
-10.00	0.00	11.00	11.00

MATRIZ A

-3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-3.00	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	6.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	0.00	3.00	0.00	0.00	1.00	0.00
0.00	0.00	-5.00	0.00	0.00	0.00	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

FATORES INVARIANTES

GRAUO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-5.00	3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	5.00	-3.00	-6.00	3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

MATRIZ DE SIMILARIDADE

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
0.00	0.60	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.60	2.80	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2.80	-0.60	-6.00	0.00	-5.00	0.00	0.00
-0.60	-7.80	-3.00	-5.00	0.00	0.00	0.00
-7.80	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00

3. - O PROBLEMA DO "RANK" DE UMA MATRIZ RETANGULAR

3.1 - A ESCOLHA DAS LINHAS

Quando fazemos o desacoplamento entrada-estado-saida de S(A,B,C) e usamos o teorema 4.1 (condição necessária e suficiente), eventualmente, precisaremos saber se "rank" $\mathcal{C}_i(\Gamma_i)$ é menor do que $\underline{m}$. Êste cálculo é muito trabalhoso, principalmente quando $\mathcal{C}_i(\Gamma_i)$ são matrizes retangulares com dimensões elevadas. Para o cálculo do "rank" de matrizes quadradas, podemos utilizar o algorítmo de GAUSS[1]. Portanto é preciso que se encontre uma forma sistemática de se escolher as linhas (colunas) da matriz, de modo que, encontremos tôdas as matrizes quadradas de ordem máxima obtidas a partir de uma matriz retangular.

Seja a matriz retangular abaixo:

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & j_1 & j_2 & & j_m & \\
 & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1m} & i_1 \\
 & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2m} & i_2 \\
M = & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} & i_m \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
 & m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pm} & i_p
\end{array}
\qquad \text{onde } p \geqslant m
$$

Queremos sistematizar a escolha de m das p linhas.

Sejam i_1^*, i_2^*, ..., i_m^*, as ordens das linhas escolhidas.

Uma forma de se escolher as m linhas, será variando os índices como se vê abaixo:

$$
\begin{aligned}
i_1^* &= 1,\ 2,\ \ldots,\ p-m+1 \\
i_2^* &= i_1^*+1,\ \ldots,\ p-m+2 \\
&\vdots \\
i_m^* &= i_{m-1}^*+1,\ \ldots,\ p
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos as $\frac{p!}{m!\,(p-m)!}$ combinações possíveis de linhas.

Vamos exemplificar:

Sejam p=4 e m=3

Então

$$
\begin{aligned}
i_1^* &= 1,\ 2 \\
i_2^* &= i_1^*+1, 3 \\
i_3^* &= i_2^*+1, 4
\end{aligned}
$$

E as quatro combinações possíveis serão:

	1ª	2ª	3ª	4ª
i_1^*	1	1	1	2
i_2^*	2	2	3	3
i_3^*	3	4	4	4

3.2 - O PROGRAMA

O programa desenvolvido, pode ser empregado para matrizes retangulares com dimensão máxima (10x10). Pode ser modificado fàcilmente para dimensões maiores.

A utilização do programa é muito simples. Para uma matriz B(pxm), são utilizados (p+1) cartões de entrada. O primeiro cartão fornece m e p , nesta ordem e no formato 2 I.2. Os outros p cartões, fornecem as linhas da matriz, da mesma forma que o programa anterior.

O programa foi testado várias vezes com sucesso, obtendo-se, inclusive, tôdas as combinações possíveis de linhas.

Nas próximas páginas, temos a listagem do programa, assim como, o resultado para duas matrizes.

```
PAGE   1    P 163044

// JOB    00FF 10FF                                             P 163044

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        00FF        00FF        0000
  0001        10FF        10FF        0001
                          2013        0002

V2 M05   ACTUAL 32K  CONFIG 32K

// FORTRAN
**
* IOCS(2501 READER, 1403 PRINTER)
* LIST SOURCE PROGRAM
* ONE WORD INTEGERS
```

PAGE 2 P 163044

```
      DIMENSION A(10,10),B(10,10)
      READ(8,10)M,N
 10   FORMAT(2I2)
      READ(8,12)((A(I,J),J=1,10),I=1,N)
 12   FORMAT(10F7.3)
      WRITE(5,16)
 16   FORMAT('1')
      WRITE (5,13)
 13   FORMAT(' MATRIZ A ',///)
      TOLER=0.0001
      DO 15 I=1,N
      WRITE(5,14)(A(I,J),J=1,M)
 14   FORMAT(10F10.3)
 15   CONTINUE
      LS1=N-M+1
      LS2=N-M+2
      LS3=N-M+3
      LS4=N-M+4
      LS5=N-M+5
      LS6=N-M+6
      LS7=N-M+7
      LS8=N-M+8
      LS9=N-M+9
      LS10=N-M+10
      DO 70 I1=1,LS1
      IF(M-1)30,30,20
 20   LI2=I1+1
      DO 71 I2=LI2,LS2
      IF(M-2)30,30,21
 21   LI3=I2+1
      DO 72 I3=LI3,LS3
      IF(M-3)30,30,22
 22   LI4=I3+1
      DO 73 I4=LI4,LS4
      IF(M-4)30,30,23
 23   LI5=I4+1
      DO 74 I5=LI5,LS5
      IF(M-5)30,30,24
 24   LI6=I5+1
      DO 75 I6=LI6,LS6
      IF(M-6)30,30,25
 25   LI7=I6+1
      DO 76 I7=LI7,LS7
      IF(M-7)30,30,26
 26   LI8=I7+1
      DO 77 I8=LI8,LS8
      IF(M-8)30,30,27
 27   LI9=I8+1
      DO 78 I9=LI9,LS9
      IF(M-9)30,30,28
 28   LI10=I9+1
```

PAGE 3 P 163044

```
      DO 79 I10=LI10,LS10
 30   DO 80 J=1,M
 80   B(1,J)=A(I1,J)
      IF(M-1)50,50,40
 40   DO 81 J=1,M
 81   B(2,J)=A(I2,J)
      IF(M-2)50,50,41
 41   DO 82 J=1,M
 82   B(3,J)=A(I3,J)
      IF(M-3)50,50,42
 42   DO 83 J=1,M
 83   B(4,J)=A(I4,J)
      IF(M-4)50,50,43
 43   DO 84 J=1,M
 84   B(5,J)=A(I5,J)
      IF(M-5)50,50,44
 44   DO 85 J=1,M
 85   B(6,J)=A(I6,J)
      IF(M-6)50,50,45
 45   DO 86 J=1,M
 86   B(7,J)=A(I7,J)
      IF(M-7)50,50,46
 46   DO 87 J=1,M
 87   B(8,J)=A(I8,J)
      IF(M-8)50,50,47
 47   DO 88 J=1,M
 88   B(9,J)=A(I9,J)
      IF(M-9)50,50,48
 48   DO 89 J=1,M
 89   B(10,J)=A(I10,J)
C     ELIMINACAO DOS ELEMENTOS ABAIXO DA DIAGONAL
 50   M1=M-1
      DO 69 I=1,M1
C     TESTE PARA SABER SE B(I,I) E DIFERENTE DE ZERO
      DO 51 II=I,M
      IF(ABS(B(II,I))-TOLER)51,51,55
 51   CONTINUE
C     NOVO TESTE ( COLUNA NULA )
      GO TO 70
 55   IF(II-I)60,60,56
C     TROCA DE LINHAS ** B(I,I) = 0
 56   DO 57 J=I,M
      TRANS=B(I,J)
      B(I,J)=B(II,J)
 57   B(II,J)=TRANS
C     CONTINUACAO DO ' DO '
 60   II=I+1
      DO 69 J=II,M
      BARMA=B(J,I)
      DO 69 K=I,M
      B(J,K)=B(J,K)-(BARMA/B(I,I))*B(I,K)
```

```
PAGE   4    P 163044

 69   CONTINUE
      IF(ABS(B(M,M))-TOLER)65,65,95
 65   GO TO(70,71,72,73,74,75,76,77,78,79),M
 79   CONTINUE
 78   CONTINUE
 77   CONTINUE
 76   CONTINUE
 75   CONTINUE
 74   CONTINUE
 73   CONTINUE
 72   CONTINUE
 71   CONTINUE
 70   CONTINUE
      GO TO 100
 95   WRITE(5,91)M
 91   FORMAT(///,' RANK A = ',I2)
      GO TO 101
 100  WRITE(5,92)M
 92   FORMAT(///,' RANK DE A MENOR DO QUE ',I2)
 101  CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON       0  VARIABLES     446  PROGRAM   1092

 END OF COMPILATION

// XEQ
```

MATRIZ A

1.000	-2.000	-2.500	-1.000
0.000	1.000	4.000	1.000
2.000	-6.000	-10.000	-4.000
4.000	4.000	-3.000	8.000
-1.000	2.000	0.000	1.000
0.000	2.000	-1.000	2.000
5.000	1.000	5.000	6.000

RANK DE A MENOR DO QUE 4

Observação:

É fácil verificar que a 4a. coluna é igual à soma das duas primeiras colunas.

MATRIZ A

1.000	-2.000	-2.500	1.000
5.000	1.000	5.000	7.000
0.000	2.000	-1.000	9.000
4.000	4.000	-3.000	8.000
-1.000	2.000	0.000	2.000
2.000	-6.000	-10.000	-4.000
0.000	1.000	4.000	3.000

RANK A = 4

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

1 - CONCLUSÕES

O método é bastante geral, visto que os fatôres invariantes podem ser calculados sôbre qualquer campo. Foram usados os reais devido à sua ligação com a teoria de contrôle. Portanto, esta decomposição também pode ser usada para a Teoria da Codificação, Máquinas Sequenciais Lineares e outras áreas da Teoria de Sistemas.

O desacoplamento tem a vantagem de utilizar a estrutura inerente a A. O número de blocos em que o sistema é desacoplado depende exclusivamente dos fatôres invariantes de A. Se levarmos em consideração a referência 8 , verificamos que o método desenvolvido utiliza o número mínimo de entradas e saídas necessárias para a completa controlabilidade e observabilidade do sistema desacoplado.

O método utilizado por Gilbert permite que se escolham os polos de função de transferência em malha fechada do sistema desacoplado. O nosso método não permite isto, pois os polos estarão determinados pelos fatôres invariantes de A. Entretanto, temos algum contrôle sôbre os zeros da função de transferência, pois, em geral, as matrizes Q e R não são ùnicamente determinadas. Isto significa que os zeros da função de transferência em malha fechada não são ùnicamente determinados (vide II.28). Já no desacoplamento entrada-saída empregado por Gilbert, os zeros são fixos.

É fácil verificar porque se afirma que o desacoplamento entrada-estado-saída é mais forte que o desacoplamento entrada-saída. Imaginemos um sistema não controlável (observável) e que esteja desacoplado segundo entrada-saída. Então, é possível que êste sistema possua uma componente do vetor-estado que influencie (seja influenciada por) mais de uma componente de saída (entrada).[9] Neste caso, apesar de haver desacoplamento entrada-saída, não haverá desacoplamento entrada-estado-saída.

A grande vantagem do método desenvolvido para o desacoplamento entrada-estado-saída é a sua simplicidade e generalidade. Simplicidade, pois são feitas apenas transformações de coordenadas. Generalidade, pois a Forma Canônica Racional sempre existe e é única.

2 - SUGESTÕES PARA FUTUROS ESTUDOS

Para o sistema desacoplado, poderemos estudar o efeito da realimentação de estados sôbre a resposta do sistema. Como o sistema está desacoplado, isto se reduz ao estudo de cada subsistema separadamente.

Um problema mais interessante é ver se a realimentação de estados pode transformar um sistema que não tenha satisfeito a condição do "rank" para o desacoplamento num sistema desacoplável. Isto talvez possa ser conseguido, modificando-se os fatôres invariantes da matriz A.

É sabido que os fatôres invariantes podem ser fatorados em "divisores elementares", os quais dependem do campo sôbre o qual se opera[1]. Isto reduzirá as dimensões dos blocos de variáveis de estado. Portanto, pode ser desenvolvida uma teoria para desacoplamento, utilizando-se os divisores elementares da matriz A.

APÊNDICE

TEORIA DOS FATÔRES INVARIANTES E FORMA CANÔNICA RACIONAL

Neste apêndice serão apresentadas noções básicas sôbre os "fatôres invariantes" e a"forma canônica racional" de matrizes quadradas. As provas dos teoremas podem ser encontradas na referência[1].

1. - FATÔRES INVARIANTES

1.1 - DEFINIÇÃO

Uma matriz polinomial, ou λ - matriz, é uma matriz $A(\lambda)$ cujos elementos são polinômios em λ.

Seja $A(\lambda)$ uma matriz polinomial de dimensão $n \times n$ e "rank" n. Seja $D_j(\lambda)$ o máximo divisor comum de todos os menores de $A(\lambda)$ de ordem $j (j = 1,2,\ldots,n)$. É fácil verificar que na série

$$D_n(\lambda),\ D_{n-1}(\lambda),\ \ldots,\ D_1(\lambda),\ D_o(\lambda) \equiv 1$$

cada polinômio divide o imediatamente anterior. Os correspondentes quocientes serão denotados por $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$:

$$f_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},\ f_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)},\ \ldots,\ f_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_o(\lambda)} \tag{A.1}$$

1.2 - DEFINIÇÃO

Os polinômios $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ definidos em (A.1), são chamados fatôres invariantes da matriz $A(\lambda)$.

Serão apresentadas a seguir, três tipos de operações elementares nas linhas de uma matriz polinomial A (λ). Estas operações são chamadas operações elementares à esquerda.

1 - Multiplicar uma linha, por exemplo, a i-ésima, por uma constante $c \neq o$.

2 - Somar a uma linha, por exemplo, a i-ésima; outra linha, por exemplo, a j-ésima, multiplicada por um polinômio arbitrário $b(\lambda)$.

3 - Permutar duas linhas, por exemplo, i-ésima e j-ésima.

É fácil verificar que as operações 1, 2, 3, são equivalentes, respectivamente, a multiplicação à esquerda da matriz $A(\lambda)$ pelas seguintes matrizes quadradas de ordem n.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & (i) & & \end{array} \\
S' = & \left|\begin{array}{ccccc}
1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & c & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{array}\right|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\
S'' = & \left|\begin{array}{ccccccc}
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 1 & \cdots & b(\lambda) & \cdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{array}\right|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} \\
S'' = & \left|\begin{array}{ccccccc}
1 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
 & & \vdots & & \vdots & & 1
\end{array}\right|
\end{array}
\qquad (A.2)
$$

onde todos os elementos que não aparecem são 1 quando na diagonal principal, e zero quando em outra posição.

Da mesma forma podemos definir operações elementares nas colunas de $A(\lambda)$. Elas são chamadas <u>operações elementares à direita</u>, e correspondem a multiplicação à direita de $A(\lambda)$, respectivamente, pelas seguintes matrizes quadradas.

$$
T' = \begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccccc}
1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & c & \cdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{array}\right|\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
T'' = \begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccccccc}
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & b(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{array}\right|\end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$T'''=\left|\begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \qquad (A.3)$$

As matrizes (S', S", S"', T', T", T"') são chamadas <u>matrizes elementares</u>.

É fácil verificar que as matrizes elementares possuem determinante constante não-nulo, e que a inversa de uma matriz elementar é uma matriz elementar. Além disso, pode-se provar[1] que tôda matriz polinomial, cujo determinante é constante e diferente de zero, pode ser expressa como um produto de matrizes elementares. Assim:

1.3 - <u>DEFINIÇÃO</u>

Duas matrizes polinomiais $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são chamadas: 1) <u>equivalente à esquerda</u>; 2) <u>equivalentes à direita</u>; 3) <u>equivalentes</u> se

1) $B(\lambda) = P(\lambda)\, A(\lambda)$

2) $B(\lambda) = A(\lambda)\, Q(\lambda)$

3) $B(\lambda) = P(\lambda)\, A(\lambda)\, Q(\lambda)$,

respectivamente, onde $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ são matrizes polinomiais com determinante constante não-nulo.

Pode-se provar[1] que tôda matriz polinomial pode ser levada através de operações elementares de linha e de coluna à forma abaixo.

$$\begin{vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & a_{n-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n(\lambda) \end{vmatrix} \qquad \text{(A.4)}$$

onde todos os elementos da matriz com exceção da diagonal principal são nulos; $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, ..., $a_n(\lambda)$ são polinômios mônicos, e cada polinômio da sequência acima é divisível pelo precedente.

1.4 - TEOREMA

Tôda matriz polinomial $A(\lambda)$ é equivalente à matriz canônica diagonal abaixo

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} f_n(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{n-1}(\lambda) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & f_1(\lambda) \end{vmatrix} \qquad \text{(A.5)}$$

onde $(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$ são os fatôres invariantes de $A(\lambda)$.

Êste teorema decorre do fato que $f_i(\lambda) = a_{n-i+1}(\lambda), (i = 1,2,\ldots,n)$ e de (A.4).

Comparando-se (A.4) e(A.5) concluimos que os fatôres invariantes de uma matriz polinomial $A(\lambda)$, podem ser obtidos através de operações elementares de linha e de coluna em $A(\lambda)$.

1.5 - COROLÁRIO

Duas matrizes polinomiais quadradas $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$, são equivalentes se, e sòmente, se elas têm os mesmos fatôres invariantes.

1.6 - COROLÁRIO

Na sequência de fatôres invariantes $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$, cada polinômio divide o precedente.

1.7 - DEFINIÇÃO

Fatôres invariantes de uma matriz constante A são fatôres invariantes de sua matriz característica $(\lambda I - A)$, onde I é a matriz identidade com a mesma dimensão que A.

Pode-se provar[1] que para tôda matriz constante A de dimensão $n \times n$ são válidas as igualdades abaixo:

$$g(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_i(\lambda)$$

$$p(\lambda) = f_1(\lambda) \qquad (A.6)$$

onde:

$g(\lambda)$ é o polinômio característico de A.

$p(\lambda)$ é o polinômio mínimo de A

$f_i(\lambda) (i = 1, 2, \ldots, n)$ são fatôres invariantes de A.

1.8 - TEOREMA

Se os binômios $(A_o\lambda + A_1)$ e $(B_o\lambda + B_1)$, onde A_o, A_1, B_o, B, são matrizes constantes e A_o, B_o são não-singulares, são equivalentes, ou seja, se

$$B_o\lambda + B_1 = P(\lambda)\ (A_o\lambda + A_1)\ Q(\lambda)$$

então êles são <u>estritamente equivalentes</u>, ou seja,

$$B_o\lambda + B_1 = P\ (A_o\lambda + A_1)\ Q$$

onde P e Q são matrizes constantes são-singulares.

1.9 - TEOREMA

Duas matrizes A e B são similares ($B = T^{-1}A\ T$) se e sòmente se possuem os mesmos fatôres invariantes.

1.10 - DEFINIÇÃO

Valor à direita $G(B)$ (esquerda $\hat{G}(B)$) de $G(\lambda)$ em B, onde $G(\lambda) = \lambda^m G_o + \lambda^{m-1} G_1 + \ldots + G_m$ e G_i $(i = 0,1,\ldots,m)$ são matrizes é definido por $G(B) = G_o B^m + G_1 B^{m-1} + \ldots + G_m$ $(\hat{G}(B) = B^m G_o + B^{m-1} G_1 + \ldots + G_m)$.

1.11 - TEOREMA

Se A e B são similares ($B = T^{-1}A\ T$), pode-se tomar como matriz de similaridade:

$$T = Q(B) = (\hat{P}(B))^{-1}$$

onde $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ são matrizes polinomiais definidas pela identidade.

$$\lambda I - B = P(\lambda)\ (\lambda I - A)\ Q(\lambda)$$

que relaciona as matrizes características $(\lambda I-A)$ e $(\lambda I-B)$; e onde $Q(B)$ $(\hat{P}(B))$ representa o valor à direita (esquerda) de $Q(\lambda)$ $(P(\lambda))$, quando o argumento é substituido por B.

2. - FORMA CANÔNICA RACIONAL DE UMA MATRIZ

Seja $\quad g(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_o$

Consideremos a matriz quadrada M de dimensão m x m.

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 \cdots\cdots 0 & -\alpha_o \\ 1 & 0 \cdots\cdots 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 \quad\quad \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \ddots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots 1 & -\alpha_{m-1} \end{vmatrix} \qquad (A.7)$$

É fácil verificar que $g(\lambda)$ é o polinômio característico de M. Também é fácil verificar que

$$f_1(\lambda) = g(\lambda)$$

$$f_2(\lambda) = \ldots\ldots = f_m(\lambda) = 1$$

M é denominada <u>matriz companion</u> do polinômio $g(\lambda)$.

Seja A uma matriz n x n com fatôres invariantes

$$f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ \ldots,\ f_k(\lambda),\ f_{k+1}(\lambda) = 1,\ \ldots,\ f_n(\lambda) = 1$$

onde os polinômios

$$f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ \ldots,\ f_k(\lambda)$$

têm graus positivos. Sejam M_1, M_2, ..., M_t, as matrizes companion correspondentes a êstes polinômios.

A <u>forma canônica racional</u> de A é dada por:

$$\oplus M = \left|\begin{array}{ccc} M_1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & M_t \end{array}\right| \tag{A.8}$$

É fácil verificar que os fatôres invariantes de A e de $\oplus$ M são os mesmos e, portanto, usando o teorema 1.9, segue que A e $\oplus$ M são similares ($\oplus M = T^{-1} A\ T$).

3. - MÉTODO DE CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE SIMILARIDADE

Seja A uma matriz quadrada n x n.Veremos agora, como obter uma matriz de similaridade T, tal que:

$$\oplus M = T^{-1} A\ T \tag{A.9}$$

De acôrdo com o teorema 1.11, podemos escolher como matriz de similaridade

$$T = Q(\oplus M) \tag{A.10}$$

onde

$$\lambda I - \oplus M = P(\lambda)\ (\lambda I - A)\ Q(\lambda) \tag{A.11}$$

Para determinarmos $Q(\lambda)$, transformamos $(\lambda I - A)$ e $(\lambda I - \oplus M)$ em $F(\lambda)$ (veja teorema 1.4). Assim:

$$F(\lambda) = P_1(\lambda)\ (\lambda I - A)\ Q_1(\lambda)$$

$$F(\lambda) = P_2(\lambda)\ (\lambda I - \oplus M)\ Q_2(\lambda) \tag{A.12}$$

onde

$$Q_1(\lambda) = T_1\ T_2,\ \ldots,\ T_{p_1}$$

$$Q_2(\lambda) = T_1^*, T_2^*, \ldots, T_{p_2}^* \tag{A.13}$$

e onde T_1, T_2, ..., T_{p_1}, T_1^*, ..., $T_{p_2}^*$ são matrizes elementares correspondentes às operações elementares de colunas nas matrizes $(\lambda I - A)$ e $(\lambda I - \oplus M)$.

De (A.12) e (A.13), vem:

$$Q(\lambda) = Q_1(\lambda)\, Q_2^{-1}(\lambda) = T_1\, T_2 \ldots T_{p_1}\, T_{p_2}^{*^{-1}} \ldots T_2^{*^{-1}}\, T_1^{*^{-1}} \qquad \text{(A.14)}$$

Finalmente, de acôrdo com (A.10), basta substituir λ em (A.14) por $\oplus M$ para se obter a matriz de similaridade.

<u>OBSERVAÇÃO</u> : Deve-se notar que a matriz de similaridade T não é única, pois sua forma geral é:

$$T = U\, T_1 \qquad \text{(A.15)}$$

onde

T_1 é uma das matrizes de similaridade

U é permutável com A, ou seja, UA = AU.

B I B L I O G R A F I A

1. - GANTMACHER, F.R., The Theory of Matrices , Chelsea Publisting Company, New York, 1960.

2. - GILL, A., "Linear Modular Systems", System Theory, Zadeh, L.A., and Polak, E., editôres, McGraw-Hill, New York,p.179-231,1969.

3. - KERSCHBERG, L., An Algebraic aproach to Linear and Multilinear Systems Theory, tese de doutorado, Case Western Reserve University, 1969.

4. - GILBERT, E.G., "The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback", SIAM Journal of Control, vol.7, nº 1, Feb. 1969.

5. - FALB, P.L., WOLOVICH, W.A., "Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-12, nº 6, Dec. 1967.

6. - WOLOVICH, W.A., FALB, P.L., "On the Structure of Multivariable Systems", SIAM Journal of Control, vol.7, nº 3, Aug. 1969.

7. - GILBERT, E.G., PIVNICHNY, J.R., "A Computer Program for the Synthesis of Decoupled Multivariable Feedback Systems", Preprints , JACC (Boulder, Colorado, 1969), p.677-684.

8. - VOGT, W.G., CULLEN, C.G., "The Mininum Number of Inputs Required for the Complete Controllability of a Linear Stationary Dynamical System", IEEE Transactions on Automatic Control, June 1967.

9. - GILBERT, E.G., "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems", SIAM Journal of Control, Ser. A, vol. 2, nº 1, 1963.